



TITLE:

開水路流れにおける乱流拡散機構
に関する水理学的研究(
Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

細田, 尚

CITATION:

細田, 尚. 開水路流れにおける乱流拡散機構に関する水理学的研究. 京都大学, 1990, 工学博士

ISSUE DATE:

1990-05-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r7239>

RIGHT:

新 刊

工

810

京大附図

開水路流れにおける乱流拡散機構 に関する水理学的研究

1990年 1 月

細 田 尚

開水路流れにおける乱流拡散機構 に関する水理学的研究

1990年1月

細 田 尚

目 次

序 論	1
第 1 編 乱流拡散係数の水理学的特性に関する研究	7
第 1 章 乱流拡散係数と Euler 的乱れ特性量の関係	8
1.1 乱流拡散係数と濃度分布の関係	8
1.2 基礎式と解析方法	10
(1) 基礎式	10
(2) 一様乱流場のモデル	12
(3) 解析方法	14
1.3 計算結果と考察	16
(1) 計算結果	16
(2) 開水路流れの乱流拡散現象への適用	19
1.4 結語	22
参考文献	23
第 2 章 二次元解析モデル	25
2.1 基礎式	25
2.2 基礎式の無次元化と無次元パラメータ	27
2.3 解析方法と計算条件	28
2.4 計算結果の考察	29
2.5 結語	35
参考文献	35
第 3 章 粗・滑面水路の水路幅方向乱流拡散係数	37
3.1 乱流拡散方程式のモーメント特性	37
3.2 水路幅方向乱流拡散係数と水理量の関係	40
(1) 実験の概要	40
(2) 濃度分布の伝播特性	42
(3) 乱流拡散係数と水理量の関係	47
3.3 結語	50
参考文献	51
第 4 章 濃度変動の拡散機構	52
4.1 $\overline{c'^2} - \epsilon_c$ 方程式の基本的特性	52
(1) $\overline{c'^2} - \epsilon_c$ 方程式の概要	52

(2) 一様乱流場での $\overline{\epsilon'^2} - \epsilon_c$ 方程式の構成	53
(3) ϵ_c 方程式の生成項の表示に関する考察	55
4.2 開水路流れにおける濃度変動場の流下過程	58
(1) 解析に用いられる基礎式系	58
(2) 実験の概要	60
(3) 実験結果と解析結果の比較	61
4.3 結語	69
参考文献	69
第2編 開水路流れにおける乱流拡散現象の乱流モデルによる解析	71
第1章 乱流モデルの考察	72
1.1 減衰する一様等方性乱流場での乱流モデル	72
1.2 応力モデルと $k-\epsilon$ モデル	75
(1) 応力モデルの概要	75
(2) $k-\epsilon$ モデルの概要	79
参考文献	82
第2章 応力モデルによる乱流拡散係数の推定法	84
2.1 基礎式とその特性	84
2.2 解析方法	87
2.3 計算の諸条件	89
(1) モデル定数の値	89
(2) κ , A_s の値	90
(3) $u_* h / \nu$ の値	90
(4) 路床近傍の境界条件を与える y 座標	90
2.4 計算結果の考察	90
(1) 定常化過程	90
(2) 平均流速の分布	90
(3) 乱れ特性量の分布	90
2.5 乱流拡散係数の推定	95
2.6 結語	96
参考文献	97
第3章 Surface Jet に関する解析	98
3.1 $k-\epsilon$ モデルの基本的特性	98
(1) 二次元 Jet	98
(2) Round Jet	101

3.2 Surface Jet に関する数値解析	104
(1) 基礎式	104
(2) 解析法と境界条件	105
(3) 基礎式の無次元化と無次元パラメータ	107
(4) 計算結果の考察	109
3.3 結語	118
参考文献	118
第4章 Buoyant Surface Jet に関する解析	119
4.1 Launder の研究	119
4.2 ϵ -方程式に関する一考察	122
4.3 二次元 Buoyant Surface Jet に関する数値解析	125
(1) 基礎式	126
(2) 実験の概要	127
(3) 計算条件と計算結果の考察	128
4.4 結語	139
参考文献	140
第5章 浮遊砂流に関する解析	142
5.1 基礎式の誘導	146
(1) 層流状態での基礎式	147
(2) 乱流状態での基礎式	148
5.2 Richardson 数の影響に関する考察	151
5.3 乱れ速度差による相互作用項のモデル化	154
5.4 基礎式の無次元化と無次元パラメータ	157
5.5 解析方法	160
5.6 計算結果の考察	161
(1) 滑面上の流れの特性	161
(2) 粗面上の流れの特性	169
5.7 結語	176
参考文献	177
結 論	179
付録-A 第1編 (1.19) 式による移流分散現象の解析	185

序 論

水理学で対象とする流れの場は、主に河川・貯水池・湖沼・沿岸海域などの水流・水面である。そこに存在する水を、我々の生活の維持・向上に有効利用するための多くの努力が積み重ねられている。しかし、社会的・経済的制約から、有限な水の利用には精度の高い技術・知識の援用が必要になる。それに伴い、水に関わる各種水工構造物の設計、管理、操作、運営方法などを決定するための基礎知識も、高精度のものが要求されるようになってきている。

水の有効利用に関する諸問題に対処するためには、水の流れとそこに含まれる物質や熱の拡がりについて十分把握することが必要となる。このために、現地観測、水理実験や数値シミュレーションによる研究が精力的に行われ、これまでに数多くの成果を上げてきた。これらの成果をもとに、現象を解明するためのより一般的な方法の確立と、それにもとづいた解析結果の評価、応用も重要な課題と考えられる。

水理学で対象とする現象を解析する方法の一つとして、現象を必要に応じた程度に再現しうる数学モデルを用いることが考えられる。この数学モデルによる解析に当って、事前に基礎式の設定を行わなければならない。また、流れの挙動や、その中の物質、熱の拡がりを記述する基礎式中の諸係数の合理的設定も重要な課題と考えられる。

設定しなければならない諸係数の中で重要と考えられるものとして、乱流拡散係数、渦動粘性係数が挙げられる。乱流拡散係数は、G. I. Taylor¹⁾に始まる Lagrange 的解析法による定義と、質量保存則に Reynolds の手法を用いて導かれる乱流拡散方程式を閉じるための係数という二通りの使い分けがなされる。実用的には後者を指すことが多いが、少なくとも一様乱流場では両者の関係は明らかであって、乱流拡散係数の水理特性に関する考察を行うためには Taylor の理論は不可欠のものとなっている。

このような事情から、乱流拡散係数の設定法としては次の二通りが考えられている。

- ① 流体粒子を追跡することによって得られる Lagrange 的乱れ速度の相関係数と、固定点の乱れ速度に関する Euler 的相関係数の関係から、乱流拡散係数と Euler 的乱れ特性量を関係づける方法²⁾。
- ② 乱流拡散方程式に付随する物質、熱の乱流フラックスの関係式をモデル化して得られる乱流拡散係数の表示を用いる方法³⁾。(乱流モデルによる方法)

これら二つの方法は相補的であって、本研究でも両者を組み合わせた方法が検討される。

もちろん、より簡単な方法として、乱流拡散係数を水深や摩擦速度等の巨視的な水理量と関係づけることが考えられる。すなわち、実験、観測により得られた濃度分布の時間的、空間的モーメント特性から乱流拡散係数を算定し、水理量との関係が検討されている^{4,5,6)}。

一方、渦動粘性係数は、流体の運動方程式である Navier-Stokes 方程式に、時間平均またはアンサ

ンブル平均を施して得られる Reynolds 方程式中に現れる Reynolds 応力 $-\overline{\rho u'_i u'_j}$ を、既知の水理量で表すために導入された係数であり、次式の D として定義される⁷⁾。

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \rho D \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \rho \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

ここに、 U_i , u'_i ; 各々、平均流速、変動流速ベクトルの成分、 k ; 乱れエネルギー、 ρ ; 流体の密度、 x_i ; 空間座標、 δ_{ij} ; クロネッカーのデルタ、 $\overline{\quad}$; 平均操作を表わす。

もちろん、渦動粘性係数を用いることなく Reynolds 応力に関する関係式を直接解くことも考えられ、状況に応じて使い分けられる。

これらの Reynolds 応力を閉じるための方法は、総称して乱流モデルと呼ばれ⁸⁾、流体现象に関わる多くの分野で研究が進められている。先に乱流拡散係数の設定法で述べた②の方法は、この枠組に入るものである。乱流モデルの研究の始まりは古く、混合距離理論や定数の渦動粘性係数も 0- 方程式モデルと呼ばれる乱流モデルの一つである。Rotta の『乱流』⁹⁾には、2- 方程式モデルを代表する $k-\epsilon$ モデルの原型も示されている。

以上述べてきたように、本研究では、乱流状態の水の流れと、その中での物質、熱の拡散現象を検討する上で重要な乱流拡散係数、渦動粘性係数に関する諸問題について考察する。本論文の構成を要約すれば次のようになる。

第 1 編においては、乱流拡散係数に関する諸問題について理論的、実験的に検討する。とくに、Lagrange 的相関係数と Euler 的相関係数の関係を用いて乱流拡散係数を推定する方法について詳細に考察する。

まず、第 1 章では、乱流拡散現象を解明する上で基本的な問題である乱流拡散係数と Euler 的乱れ特性量の関係について理論的に考察する¹⁰⁾。Taylor の理論と Corrsin の関係式を用い、乱流場の時空間構造をモデル化した簡単な一次元モデルにより解析する。その際、Euler 的乱れ特性量で構成される無次元パラメータを導き、Lagrange 的時間スケールとの関係を検討する。得られた結果は、主流方向の乱流拡散係数に対してのみ、従来と同様の関係式

$$\frac{T_L}{T_E} \propto \frac{U_0}{\sqrt{u'^2}} \left(\begin{array}{l} T_L: \text{Lagrange 的時間スケール, } \overline{u'^2}; \text{主流方向の乱れ強さ,} \\ T_E: \text{Euler 的時間スケール, } U_0; \text{主流の速度} \end{array} \right)$$

に変換され、比例定数の値も含めてその理論的根拠を考察する。

第 2 章では、第 1 章で示したモデルを二次元場に拡張する。上に述べた関係式 $T_L/T_E \propto U_0/\sqrt{u'^2}$ は主流の方向にのみ適用でき、主流方向とそれに直交する方向の乱流拡散係数の関係を考察するためには、第 1 章で示したモデルを少なくとも二次元場に拡張することが必要となる。解析モデルの中には多くの無次元パラメータが現れるが、乱流場の異方性の効果を表わすものとして乱れ強さの比 $\overline{u'^2}/\overline{w'^2}$ ($\overline{u'^2}$, $\overline{w'^2}$; 各々、主流方向とそれに直交する方向の乱れ強さ) が主要なパラメータとなり、

主流方向とそれに直交する方向の乱流拡散係数の比 D_x/D_z と $\overline{u'^2}/\overline{w'^2}$ の関係が検討される。本章までに得られた結果は、第2編第2章で示される応力モデルによる計算結果を用いた乱流拡散係数の推定に用いられる。

ここまでは、乱流拡散係数の一般的な推定法に関する事項であるが、より実用的には乱流拡散係数と水深、摩擦速度などの巨視的な水理量の関係が求められれば便利である。このような観点から、第3章では開水路流れの水路幅方向の乱流拡散係数 D_z と水理量との関係について検討する⁶⁾。すなわち、粗面または滑面の路床を有する開水路流れの中に、トレーサーを点源より連続的に放出する拡散実験を行い、 D_z を算定する。水路の形状比 B/h が10程度より大きい場合を考え、 D_z/hu_* と U/u_* との関係を検討する (B : 水路幅, h : 水深, U : 断面平均流速, u_* : 摩擦速度)。滑面と粗面上の D_z/hu_* の特性の違いを見た後、滑面では D_z/hu_* と Reynolds 数, 粗面では D_z/hu_* と相対粗度との関係を示す。

第4章では、第3章で得られた時間平均濃度分布の特性を基に、濃度変動場の解析を行う^{11,12)}。この研究は、乱流モデルの基礎式を構成する $\overline{c'^2} - \epsilon_c$ 方程式のモデル化のための基礎資料を得ることを目的としている。乱流モデルの構成方程式の検討という観点から見れば、第2編に属すべき内容のものであるが、対象としている現象が第3章と密接に関係すること、 $\overline{c'^2} - \epsilon_c$ 方程式が第2編の内容に対して補足的なものであることから、第1編でまとめている。すなわち、流れの場の密度が空間的に一様な場合には、乱流拡散係数などの設定や流れの解析にあたって $\overline{c'^2} - \epsilon_c$ 方程式は必要とされない。しかし、第2編第4章で述べるような密度が一様でない場合には、 $\overline{c'^2} -$ 方程式とそれに付随する $\epsilon_c -$ 方程式が必要とされる場合がある。 $\epsilon_c -$ 方程式を直接解かない場合でも、各項の表示に関する考察は、乱流モデルの構成を考える上で有用と考えられる。そこで、第4章では、 $\epsilon_c -$ 方程式の生成項、散逸項の表示について考察し、その妥当性を第3章と同様の拡散実験の結果を用いて検討する。

第1編では、空間的に密度が一様な場合の乱流拡散現象を取扱ってきた。しかし、密度が空間的に非一様な場では、密度分布と流速、乱れ特性量の分布が相互に影響を及ぼしあい、個々に考えることができない。このような複雑な場での乱流拡散現象を系統的に取り扱う手法の一つに乱流モデルによる方法がある。第2編では、この乱流モデルの概要を述べるとともに、周囲流体と異なる密度で放出された surface jet の拡散機構、さらには、浮遊砂を有する開水路流れの濃度分布、流速分布特性について、乱流モデルを用いた検討を行う。

まず、第1章では、空間的に密度が一様な場合の乱流モデルの概要を示す。古くからの乱流理論の中心的課題であった減衰する一様等方性乱流場の研究と、乱流モデルとの関係について考察し、前者は後者の $\epsilon -$ 方程式に組み込まれることを確認する。次に、応力モデルの代表的なものとして Launder・Reece・Rodi¹³⁾ の研究を概説し、その特殊な場合としての $k - \epsilon$ モデルについて述べる。

第2章では、密度流、混相流の検討に入る前に、第1編で検討してきた乱流拡散係数の推定方法の適用例を示す。第1章で示した応力モデルにより、開水路流れの乱れ特性量を計算する。その結果を

第1編第1, 2章で得られた関係式に適用して開水路流れの乱流拡散係数分布を求め, その妥当性を検証する。

第3章では, 第4章で取り扱う surface jet 中の密度の拡散過程について述べる前に, 噴流に対する乱流モデルの適用性を次元解析の方法と数値解析により示している¹⁴⁾。流速分布等の変化が一方方向に卓越するようなとき, 応力モデルは $k-\epsilon$ モデルで近似される。そこで, $k-\epsilon$ モデルが turbulent jet に対して有効である根拠を, 水理量の分布形の相似性を仮定することにより示す。その後に surface jet の数値解析を行い, 水理量の噴流軸に沿った変化と横断方向の分布形について検討する。

第4章では, 周囲流体より小さい密度で放出される二次元 buoyant surface jet を取り上げる。二次元 buoyant surface jet は, 流水中での密度あるいは水温の拡散過程を研究する上で基本的な現象と考えられる。まず, 密度流での乱流拡散係数などのモデル化に関する Launder の研究¹⁵⁾を概説し, これを $k-\epsilon$ モデルに取り入れた基礎式を用いて数値解析を行う^{16,17)}。計算結果と従来の実験結果を比較し, 密度あるいは水温分布の成層化が生じる原因について詳細に考察する。

水理学で対象とする流れには, 土砂を含んだ河川の流れなど混相の流れが多く存在する。第5章においては, その中の基本的なものとして浮遊砂を有する開水路流れを考え, 濃度, 流速分布特性について乱流モデルを用いた検討を行う。混相流での乱流モデルの基礎式の誘導過程を示し¹⁸⁾, 乱流拡散係数, 液相と固相の乱れ速度の差に起因する項などのモデル化を行う。得られた基礎式を数値解析することにより, 粗面, 滑面上の浮遊砂流の拡散過程, 流速分布特性の再現を試みる^{19,20)}。

以上が本論文の内容であり, 最後に得られた主な成果をまとめて結論とする。

参考文献

- 1) Taylor, G. I. : Diffusion by continuous movement, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, Vol. 20, pp. 196-211, 1921.
- 2) 日野幹雄 : 乱流拡散における Lagrange 相関と Euler 相関の関係, 土木学会誌, 1975年11月, pp. 65-71.
- 3) Launder, B. E. : Heat and Mass Transport, Topics in Applied Physics, Vol. 12, Turbulence, edited by P. Bradshaw, Springer-Verlag, pp. 232-287, 1978.
- 4) Iwasa, Y. and Imamoto, H. : Dispersive characteristics of free surface flow in term of Lagrangian descriptions, Proc. 13th Congress of IAHR, Kyoto, A14, pp.109-118, 1969.
- 5) Okoye, J. K. : Characteristics of transverse mixing in open channel flows, Report No. KH-R-23, C. I. T., 1970.
- 6) 岩佐義朗, 細田 尚, 野口好夫 : 粗・滑面水路における水路幅方向の乱流拡散係数, 京都大学防災研究所年報 第25号 B2, pp. 557-572, 1982.
- 7) Launder, B. E. and Spalding, D. B. : The numerical computation of turbulent flows, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering 3, pp. 269-289, 1974.

- 8) Rodi, W. : Turbulence models and their application in hydraulics, A State of the Art Review, IAHR, Delft, The Netherlands, 1980.
- 9) Rotta, von J. C. : 大路通雄訳 (1975), 乱流, 岩波書店.
- 10) 岩佐義朗, 細田 尚, 余越正一郎 : 乱流拡散係数とオイラー的乱れ特性量の関係に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第357号/Ⅱ-3, pp. 89-95, 1985.
- 11) 岩佐義朗, 細田 尚, 松井健一 : 開水路流れにおける濃度変動場の伝播特性, 京都大学防災研究所年報 第29号 B2, pp. 529-537, 1986.
- 12) Iwasa, Y., Hosoda, T. and Matsui, K. : Analysis of transverse distributions of $\overline{c'^2}$ in open channel flows by means of $\overline{c'^2} - \epsilon_c$ equations, Proc. 3rd Int'l Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, IAHR, Tokyo, pp. 19-26, 1988.
- 13) Launder, B. E., Reece, G. J. and Rodi, W. : Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure, J. Fluid Mech., Vol. 68, pp. 537-566, 1975.
- 14) Hosoda, T., Iwasa, Y. and Yokosi, S. : Hydraulic analysis of turbulent jets by means of $k-\epsilon$ models, Kyoto Univ., School of Civil Eng., Research Report No. 84-HY-01, 1984.
- 15) Launder, B. E. : On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum, J. Fluid Mech., Vol. 67, pp. 569-581, 1975.
- 16) 岩佐義朗, 細田 尚, 伊藤邦展 : 乱流モデルによる Buoyant Surface Jet に関する数値解析, 京都大学防災研究所年報 第30号 B2, pp. 583-595, 1987.
- 17) Iwasa, Y., Hosoda, T. and Itoh, K. : Hydraulic analysis of two-dimensional buoyant surface jets by means of turbulence model, Proc. 6th Congress of APD-IAHR, Kyoto, Vol. III, Environmental Hydraulics, pp. 17-24, 1988.
- 18) 細田 尚, 余越正一郎 : 混相流での $k-\epsilon$ モデルの構成, 第31回水理講演会論文集, pp. 581-586, 1987.
- 19) 岩佐義朗, 細田 尚, 坂井伸一 : 滑面上の浮遊砂を有する開水路流れの抵抗則について, 第33回水理講演会論文集, pp. 595-600, 1989.
- 20) 岩佐義朗, 細田 尚, 綾 史郎, 坂井伸一 : 浮遊砂を有する滑面上の流れの流速分布特性, 第3回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp. 595-598, 1989.

第1編 乱流拡散係数の水理学的特性に関する研究

第1編では、水理学で対象とする流れの場での物質輸送を考える際に重要となる乱流拡散現象について基礎的な研究をすすめる。ここで考えている物質とは、流体粒子に追随し、かつ物質の存在が流れに影響を及ぼさないものとする。すなわち、物質が存在してもしなくても、流れの統計的性質、たとえば平均流速、乱れ強さ等に影響を及ぼさないものを考えていることになる。実際には、その物質の水への溶解による密度変化が無視できる場合や、溶解しない場合でも、低濁度の状況での微細粒子を考えることができる。実験室では、たとえば比重を1に調整した食塩水が用いられる。

これらの passive な物質が、河川・湖沼などの流れの中に放出されたとき、その後の物質の拡がり予測するために、現実的には質量の保存則に基いた乱流拡散方程式を用いて解析されることが多い。

乱流拡散方程式は時間平均、あるいはアンサンブル平均をとった濃度 C (濃度は質量百分率, mg/l , 体積濃度で定義される。)を用いて次式で与えられる¹⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} + W \frac{\partial C}{\partial z} = & \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{u'c'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{v'c'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\overline{w'c'}) \\ & + \lambda \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

ここに、 U, V, W ; 各々、時間、あるいはアンサンブル平均をとった流速ベクトルの成分、 u', v', w' ; 変動流速の成分、 c' ; 濃度変動、 λ ; 分子拡散係数、 t ; 時間、 x, y, z ; 空間座標を表す。

(1.1) 式中 $-\overline{u'c'}, -\overline{v'c'}, -\overline{w'c'}$ を

$$-\overline{u'c'} = D_x \frac{\partial C}{\partial x}, \quad -\overline{v'c'} = D_y \frac{\partial C}{\partial y}, \quad -\overline{w'c'} = D_z \frac{\partial C}{\partial z} \quad (1.2)$$

と表したときに現れる係数 D_x, D_y, D_z が乱流拡散係数と呼ばれる。(1.1) 式中、分子拡散項は無視されることが多い。

先に述べたように、物質は流れに影響を及ぼさないとしているから、(1.2) 式で導入された乱流拡散係数は流れの乱流構造によって規定される。そこで、第1章では、 D_x, D_y, D_z がどのような乱れ特性量で構成されるかを考察する。

参考文献

- 1) 岩佐義朗：水理学，朝倉土木工学講座3，朝倉書店，1969.

第1章 乱流拡散係数と Euler 的乱れ特性量の関係

乱流拡散係数と Euler 的乱れ特性量の関係については、Hay・Pasquill¹⁾の研究以来、数多くの研究がなされてきた。Hay・Pasquill は、固定点での主流方向の乱れ速度の時間相関係数と、主流方向の Lagrange 的乱れ速度の時間相関係数の相似性を仮定し、Lagrange 的時間スケール T_L と Euler 的時間スケール T_E の比 T_L/T_E が定数となると考えた。その後、 T_L/T_E は乱れ強さ $\sqrt{u'^2}$ に反比例することが指摘され²⁾、さらに Corssin³⁾ の次元考察や Wandel・Kofoed-Hansen⁴⁾ の凍結乱流の仮定を用いた解析により、 T_L/T_E は主流速度 U_0 と乱れ強さ $\sqrt{u'^2}$ の比に比例し、比例定数が 0.4 程度の値となること、すなわち $T_L/T_E \doteq 0.4 U_0 / \sqrt{u'^2}$ となることが指適された。ただし、この関係式は主流に直交する方向の乱流拡散のような $U_0 = 0$ の場合に適用できず、また、流下座標系での時間相関係数等の乱流場の時空間構造との関係も明らかでない。そこで、本章では、従来の乱流場の時空間構造に関する知見を考慮した解析モデルを用いて、乱流場の時空間構造を規定する諸パラメータと乱流拡散係数の関係について考察する。

1.1 乱流拡散係数と濃度分布の関係

Taylor⁵⁾ は、乱流拡散現象を 1 つの流体粒子の追跡とそのアンサンブル平均としてとらえ、乱流拡散係数と流体粒子の拡がり幅との関係を明らかにした。すなわち、粒子の放出位置を原点とし、 t 時間後における粒子の位置ベクトルの x 成分を $X(t)$ とする。(図1.1参照) ただし、平均流速で移動する座標系を用いているとする。このとき、 $\langle X^2(t) \rangle$ と粒子の速度 $u_x(t)$ との間に次のような関係式が見いだされた。($\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表す。)

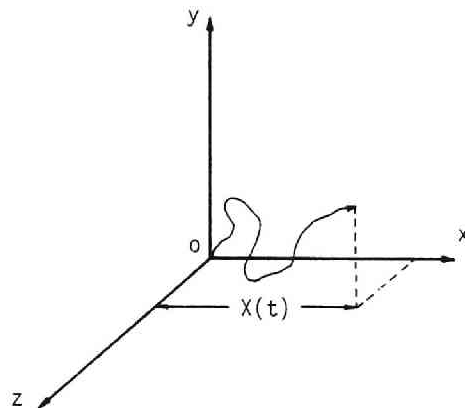


図1.1 流体粒子の軌跡

$$\frac{d\langle X^2(t) \rangle}{dt} = 2 \int_0^t \langle u_L(t) u_L(t-\xi) \rangle d\xi \quad (1.3)$$

次式で定義される Lagrange 的相関係数 $R_L(\xi)$

$$R_L(\xi) = \frac{\langle u_L(t) u_L(t+\xi) \rangle}{\langle u_L(t) \rangle^2} \quad (1.4)$$

を用いて (1.3) 式を積分すれば、よく知られた

$$\langle X^2(t) \rangle = 2 \langle u_L(t)^2 \rangle \int_0^t (t-\xi) R_L(\xi) d\xi \quad (1.5)$$

が得られる。一様乱流場では $\langle u_L(t)^2 \rangle$ は点計測で得られる乱れ強さ $\langle u^2 \rangle$ に等しいと考えられる。これらの理論は、次節においてより一般的な形式で表示される。

$R_L(\xi)$ は、 $\xi = 0$ で $R_L(0) = 1$ となり、 $\xi \rightarrow \infty$ で $R(\xi) \rightarrow 0$ と考えられ、

$$\int_0^\infty R_L(\xi) d\xi = T_L \quad (1.6)$$

で定義される Lagrange 的時間スケール T_L を用いて、次のような関係が得られる。

$$\left. \begin{array}{l} t \ll T_L \text{ のとき } \langle X^2(t) \rangle = \langle u^2 \rangle t^2 \\ t \gg T_L \text{ のとき } \langle X^2(t) \rangle = 2 \langle u^2 \rangle T_L t \end{array} \right\} \quad (1.7)$$

また、乱流拡散係数 D_x が

$$D_x = \frac{1}{2} \frac{d\langle X^2(t) \rangle}{dt} \quad (1.8)$$

で定義される。これは、(1.1) 式において U , V , W , D_x , D_y , D_z が空間的に一様であるとき、(1.1) 式を y , z に関して 0 から無限大まで積分した後に、 x^2 を乗じて x に関して 0 から無限大まで積分して得られる関係式

$$D_x = \frac{1}{2C_0} \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C dy dz \right) dx - \frac{1}{C_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C dy dz \right) dx \right]^2 \right] \quad (1.9)$$

と同一と考えられる。ここに、 C_0 は

$$C_0 = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} C dx dy dz$$

で定義される。

(1.8), (1.9) 式より, 乱流拡散係数は濃度分布の重心まわりの分散の成長率で定義されるが, 通常, (1.7) 式の $t \gg T_L$ の場合, すなわち D_x が時間にかかわらず一定と考えられる状態での値を乱流拡散係数と呼ぶことが多い。次にこの値と Euler 的乱れ特性量の関係について考える。

1.2 基礎式と解析方法

1.1で述べた Taylor の理論のみでは, Euler 的乱れ特性量と乱流拡散係数が結びつかないため, 別の関係式が必要となる。本研究では Saffman⁶⁾に従い, Lagrange 相関と Euler 相関の関係を示す Corrsin⁷⁾の関係式と, Taylor の理論を連立した解析法を用いる⁸⁾。

(1) 基礎式

時刻 t_0 に \mathbf{x}_0 にある流体粒子が, 移動とともに変わらない保存量 Ψ をもつとする。ここで, Ψ は Dirac のデルタ関数 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t | \mathbf{x}_0, t_0))$ とみなされる。 \mathbf{x} は空間座標であり, $\mathbf{X}(t | \mathbf{x}_0, t_0)$ は, 時刻 t_0 に \mathbf{x}_0 にある流体粒子の時刻 t の位置である。このように考えると, Ψ を $\Psi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ と表示するのが便利である。この Ψ を用いると, 空間座標 $\mathbf{x}(x, y, z)$ のうち同一粒子の x 方向の Lagrange 的速度 $u_L(t)$ と $u_L(t_0)$ のアンサンブル平均 $\langle u_L(t)u_L(t_0) \rangle_{(\mathbf{x}_0, t_0)}$ は次式で表わせる。

$$\begin{aligned} \langle u_L(t)u_L(t_0) \rangle_{(\mathbf{x}_0, t_0)} &\equiv \langle u^2(\mathbf{x}_0, t_0) \rangle R_L(t - t_0, \mathbf{x}_0) \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}_0, t_0) \Psi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \rangle d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.10)$$

ここに, $\langle u_L(t)u_L(t_0) \rangle$ に (\mathbf{x}_0, t) を添字として記したのは, まだ流れの場の一様性を仮定していないために, 放出点を記す必要があるからである。また, $u(\mathbf{x}, t)$ は時刻 t , 座標 \mathbf{x} での流速である。

Corrsin⁹⁾は,

$$\langle u(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}_0, t_0) \Psi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \rangle d\mathbf{x} \doteq \langle u(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}_0, t_0) \rangle \langle \Psi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \rangle d\mathbf{x} \quad (1.11)$$

と仮定して,

$$R_L(t - t_0, \mathbf{x}_0) \doteq \int \int_{-\infty}^{\infty} R_E(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) C(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x} \quad (1.12)$$

を導いた。ここに, $C(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$, $R_E(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x} &= \langle \Psi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \rangle d\mathbf{x} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Delta V} \Psi_i(\mathbf{x}', t | \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (1.13)$$

(ΔV は \mathbf{x} を含む体積 $dx dy dz$ の要素)

$$R_E(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \equiv \langle u(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}_0, t_0) \rangle / \langle u^2(\mathbf{x}_0, t_0) \rangle \quad (1.14)$$

Corrsin の関係式と呼ばれる (1.12) は次のように説明される。 \mathbf{x}_0 より出発する流体粒子を追跡する。この試行を非常に多くの回数繰り返す。その中で、出発して後 $(t-t_0)$ 経過した時、位置 \mathbf{x} を含む $d\mathbf{x} = dx dy dz$ の体積要素の中に流体粒子が存在する試行をとり出す。その個数が十分多ければ、取り出した試行の $\langle u_L(t) u_L(t_0) \rangle$ は $\langle u(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}_0, t_0) \rangle$ で近似できる。ただし、取り出した個数の全体に対する割合は $C(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x}$ であるから、全体の $\langle u_L(t) u_L(t_0) \rangle$ に対しては $\langle u(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}_0, t_0) \rangle C(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x}$ だけ寄与することになり、体積要素を集めれば (1.12) 式となる。

(1.12) 式とともに基礎式を構成する Taylor の理論も、流れの一樣性を仮定しない場合の定式化が Chatwin⁹⁾ により示されている。その概要を示せば、次のようになる。

時刻 t_0 に \mathbf{x}_0 より放出された流体粒子の時刻 t での位置の x 方向成分 $X(t)$ は、Lagrange 的速度ベクトル \mathbf{u}_L の x 方向成分 $u_L(x)$ を用いて

$$X(t) = \int_{t_0}^t u_L(s) ds \quad (1.15)$$

となり、これより 1.1 にも示した

$$\frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle = 2 \int_{t_0}^t \langle u_L(s) u_L(t) \rangle ds \quad (1.16)$$

が得られる。 $\langle u_L(s) u_L(t) \rangle$ は (1.10) 式で用いている Ψ と $u(\mathbf{x}, t)$ により次のように書くことができる。

$$\langle u_L(s) u_L(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', s) u(\mathbf{x}', s) \Psi(\mathbf{x}', s | \mathbf{x}_0, t_0) \rangle d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \quad (1.17)$$

ここで、Corrsin の仮定と同様に

$$\begin{aligned} & \langle u(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}', s) \Psi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', s) \Psi(\mathbf{x}', s | \mathbf{x}_0, t_0) \rangle d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ & \quad \doteq \langle u(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}', s) \rangle \langle \Psi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', s) \rangle \langle \Psi(\mathbf{x}', s | \mathbf{x}_0, t_0) \rangle d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (1.18)$$

と仮定すると、

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}', s) \rangle C(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', s) C(\mathbf{x}', s | \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x} d\mathbf{x}' ds \quad (1.19)$$

となる。

(1.18) 式は、Corrsin の関係式と同様に次のように説明できる。先ほどと同様に、 \mathbf{x}_0 より出発す

る流体粒子を追跡する。多数回の試行の中で、出発してから $(s-t_0)$ 時間後に位置 \mathbf{x}' を含む $d\mathbf{x}' = dx'dy'dz'$ の体積要素の内に存在し、かつ $(t-t_0)$ 時間後に \mathbf{x} を含む $d\mathbf{x} = dxdydz$ の体積要素の内に存在する割合は $C(\mathbf{x}', s | \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x}' \cdot C(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', s) d\mathbf{x}$ である。この試行の数が非常に多ければ $\langle u_i(s)u_i(t) \rangle$ に対して $\langle u(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}', s) \rangle C(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', s) C(\mathbf{x}', s | \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x} d\mathbf{x}'$ だけの寄与をする。体積要素を集めれば (1.19) 式になる。Chatwin⁹⁾ は、移流分散現象を対象としたため、 $u(\mathbf{x}, t)$ を時間平均とそれからの偏差に分けている。

(1.19) 式は (1.12) 式を用いて次のように書くことができる。

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \langle u^2(\mathbf{x}', s) \rangle R_L(t-s, \mathbf{x}') C(\mathbf{x}', s | \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x}' ds \quad (1.20)$$

ここで一様性を仮定すれば

$$R_E(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = R_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - t_0)$$

$$C(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - t_0)$$

$$\langle u_L^2(\mathbf{x}_0, t) \rangle = \langle u^2(\mathbf{x}_0) \rangle = \text{一定}$$

と考えられる。よって

$$\begin{aligned} R_L(t-t_0, \mathbf{x}_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t-t_0) \cdot C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t-t_0) d(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= R_L(t-t_0) \end{aligned} \quad (1.21)$$

となり、(1.20) 式は Taylor の理論

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle = \langle u^2 \rangle \int_0^t R_L(\tau) d\tau \quad (1.22)$$

となる。

(1.19) 式を用いた移流分散現象の解析法について、付録 A に記した。

(2) 一様乱流場のモデル

単純な乱流場のモデルを設定し、その中での乱流拡散現象を(1)で述べた基礎式で解析する。

開水路流れの乱れの時間空間構造の研究において、今本・上野・浅野¹⁰⁾ は最適相関係数による表示を用いている。乱流拡散現象の解析では、流下座標系での乱れの時間相関係数と Lagrange 的相関係数との関係が問題となるため、図1.2を参照して時空間相関係数を次のように表示する。ただし、簡単のため次元を考える。

$$\begin{aligned} R_E(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) &= R_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - t_0) \\ &= R_0(t-t_0) R_{Ex}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - U_0(t-t_0)) \end{aligned} \quad (1.23)$$

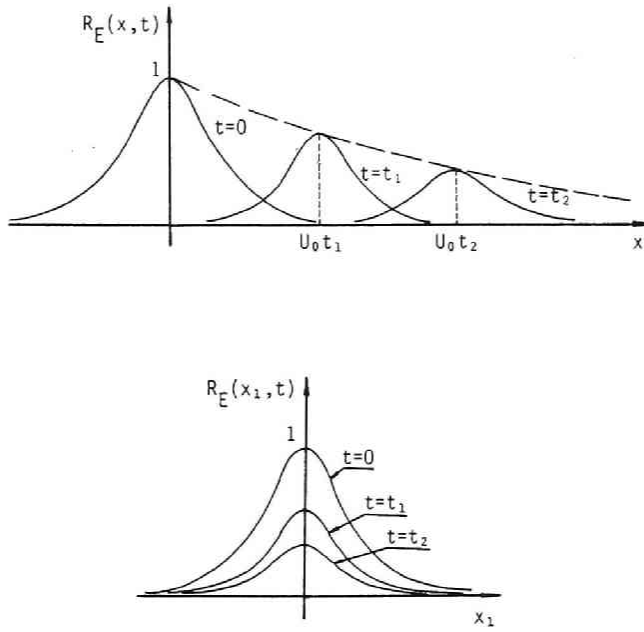


図1.2 時空間相関係数の概念図

U_0 は平均移流速度であり, $x_1 = x - x_0 - U_0(t - t_0)$ において, $R_{Ex}(x_1)$, $R_0(t)$ を次のように近似する。すなわち, 流下座標系における時間相関係数 $R_0(t)$ には次式を仮定する。

$$R_0(t) = \exp\left(-\frac{t}{T_0}\right) \quad (1.24)$$

ここに, T_0 は $R_0(t)$ の積分スケール。一方, $R_{Ex}(x_1)$ としてはスペクトル定数を考慮した次式を用いる¹¹⁾。

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{Ex}(x_1) \exp(-i2\pi q x_1) dx_1 = \frac{2L_E}{[1 + (2\pi q L_E A)]^{5/3}} \quad (A = 6/2\pi) \quad (1.25)$$

ここに, L_E は $R_{Ex}(x_1)$ の積分スケール, q は波数である。

この時空間相関係数のモデルの特性について考察する。(1.23) 式で, $x_0 = 0$, $t = 0$ とおき, $x = 0$ を考えれば

$$R_E(0, t | 0, 0) = 2 \exp\left(-\frac{t}{T_0}\right) \int_0^{\infty} \frac{2L_E}{[1 + (2\pi q L_E A)]^{5/3}} \cos[2\pi q(-U_0 t)] dq \quad (1.26)$$

は時間相関係数であって, この積分スケールが固定座標系での時間積分スケール T_E となり, $q' = qL_E$ において

$$\frac{T_E}{T_0} = 4 \int_0^\infty \frac{1}{\{1 + (2\pi q' A)\}^{5/3}} \cdot \frac{1}{1 + \left(2\pi q' \frac{U_0 T_0}{L_E}\right)^2} dq' \quad (1.27)$$

が得られる。 T_E/T_0 が無次元パラメータ $\beta = U_0 T_0/L_E$ の関数となり、関数形を

$$\frac{T_E}{T_0} = g(\beta) \quad (1.28)$$

とおく。 $U_0 = 0$ とすれば $T_E = T_0$ となる。 $g(\beta)$ を図1.3に示した。

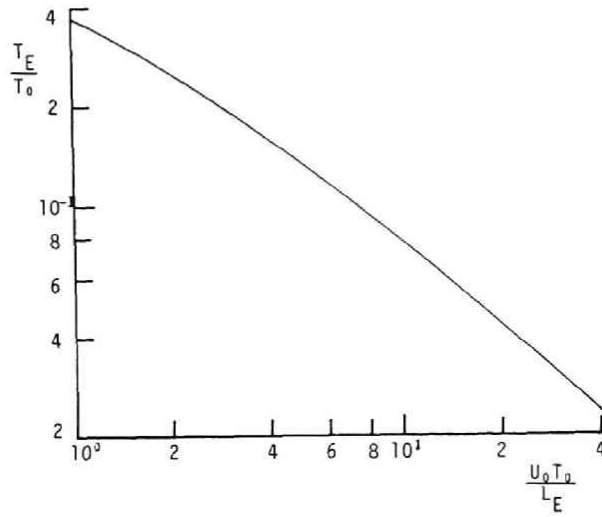


図1.3 T_E/T_0 と $U_0 T_0/L_E$ の関係

(3) 解析方法

解析に関する定式化は Saffman⁶⁾に従う。得られた基礎式は解析解を求めることが困難なため、解の物理的な特性を考慮した収束計算を行った。

乱流拡散現象を考えると、流体粒子の存在確率密度関数 $C(x, t)$ の重心まわりの拡がり問題であるから、固定座標よりも U_0 で動く移動座標 x_1 で考える方が便利である。以後、簡単のため x_1 を x とおく。

Corrsin の関係式 (1.12) は一次元の場合は

$$R_L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_E(x, t) C(x, t) dx \quad (1.29)$$

となる。Saffman と同様に $C(x, t)$ の分布形として Gauss 分布

$$\begin{aligned}
C(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle X^2(t) \rangle}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\langle X^2(t) \rangle}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2\pi q)^2 \langle X^2(t) \rangle}{2}\right) \cdot \exp(-i2\pi qx) dq
\end{aligned} \tag{1.30}$$

を用い,

$$R_E(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_E(q, t) \exp(i2\pi qx) dq \tag{1.31}$$

とにおいて (1.29) 式に代入すれば, Lagrange 的相関係数 $R_L(t)$ は

$$R_L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_E(q, t) \exp\left(-\frac{(2\pi q)^2 \langle X^2(t) \rangle}{2}\right) dq \tag{1.32}$$

となる。ここに

$$S_E(q, t) = \frac{2L_E}{|1 + (2\pi q L_E A)|^{5/3}} \exp\left(-\frac{t}{T_0}\right) \tag{1.33}$$

である。(1.22), (1.32) 式を連立して解けば $R_L(t)$, $\langle X^2(t) \rangle$ が求まるが, 解析的に解くことは困難である。そこで, 次のような $\langle X^2(t) \rangle$ の物理的な挙動を考慮した収束計算を行う。

まず, 収束計算の初期値として $\langle X^2(t) \rangle$ の $t \rightarrow 0$ の極限で成立する

$$\langle X^2(t) \rangle = \langle u^2 \rangle t^2 \tag{1.34}$$

を (1.32) 式の右辺 $\langle X^2(t) \rangle$ に代入して step 1 の $R_L^{(1)}$ を求め, 得られた $R_L^{(1)}(t)$ を用いて (1.22) 式から step 1 の $\langle X^2(t) \rangle^{(1)}$ が求まる。これを繰り返し, $R_L^{(n)}(t)$, $\langle X^2(t) \rangle^{(n)}$ が収束するまで計算を行い $R_L(t)$, $\langle X^2(t) \rangle$ を求めた。

計算結果を述べる前に基礎式の無次元化を行う。

$$t' = \frac{t}{T_0}, \quad x' = \frac{x}{L_E}, \quad \langle X^2(t) \rangle' = \frac{\langle X^2(t) \rangle}{\langle u^2 \rangle T_0^2}, \quad q' = q L_E$$

を導入すると,

$$R_L(t') = 4 \int_0^{\infty} \frac{\exp(-t')}{|1 + (2\pi q' A)|^{5/3}} \cdot \exp\left(-\frac{(2\pi q')^2 \langle X^2(t') \rangle' \langle u^2 \rangle T_0^2}{L_E^2}\right) dq' \tag{1.35}$$

$$\langle X^2(t') \rangle' = 2 \int_0^{t'} (t' - \tau') R_L(\tau') d\tau' \tag{1.36}$$

が得られる。その結果, Euler 的乱れ特性量 $\sqrt{\langle u^2 \rangle}$, T_0 , L_E で構成される無次元パラメータ

$$\alpha = \frac{L_E}{\sqrt{\langle u^2 \rangle} T_0}$$

が導かれ、無次元 Lagrange 的時間スケール T_L/T_0 が α の関数となる。

1.3 計算結果と考察

(1) 計算結果

1.2で述べた方法で、 $\alpha = 1$ として $R_L(t')$, $\langle X^2(t) \rangle'$ の計算結果を示したのが図1.4, 1.5である。これらの図より、3～5回の繰り返して収束しているのがわかる。

次に、 α をパラメータとして $R_L(t')$ を示したのが図1.6である。比較のため $R_0(t')$ も示してある。 $\alpha = 0.1$ では $R_L(t')$ は $R_0(t')$ よりかなり小さいが、 α の増大とともに $R_L(t')$ は $R_0(t')$ に漸近していくのがわかる。

Corrsin の式から

$$R_{Ex}(x) < R_{Ex}(0) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx = 1$$

を用いて

$$R_L(t') < R_0(t') \quad (1.37)$$

となることが示されており¹²⁾、 $T_L < T_0$ であることから、 $\alpha \rightarrow \infty$ のとき $T_L/T_0 \rightarrow 1$ と考えられる。このことを定量的にみるために、各 α ごとに十分大きい t' での $\langle X^2(t') \rangle'$ の成長率

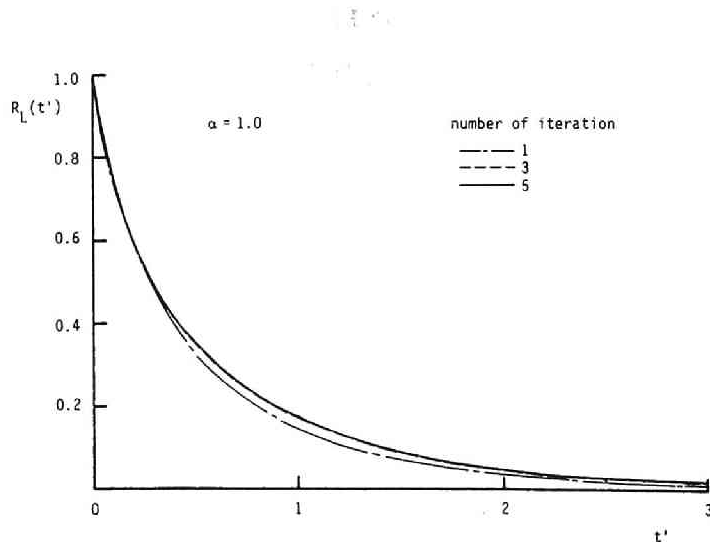


図1.4 Lagrange 的相関係数の収束過程

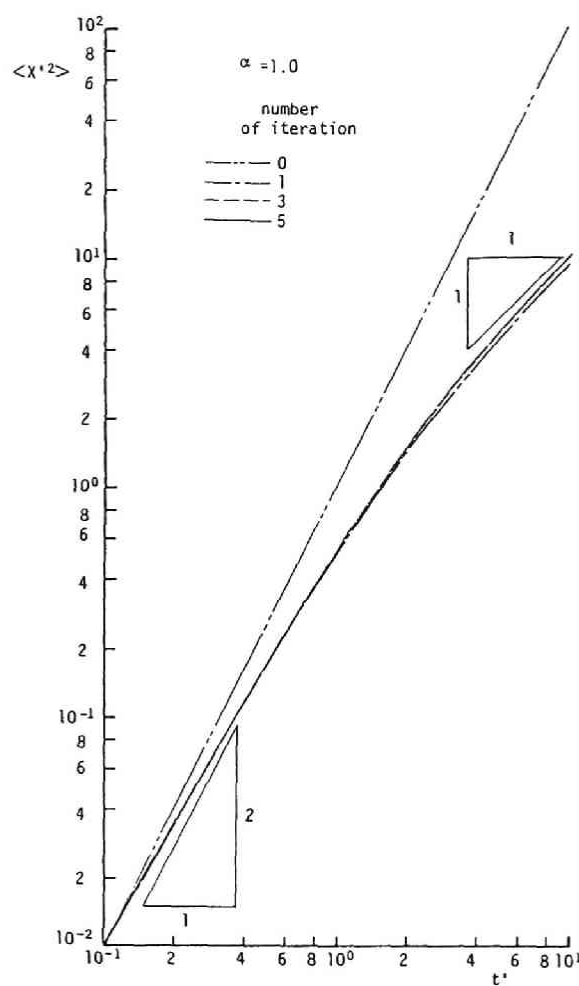


図1.5 統計的分散の収束過程

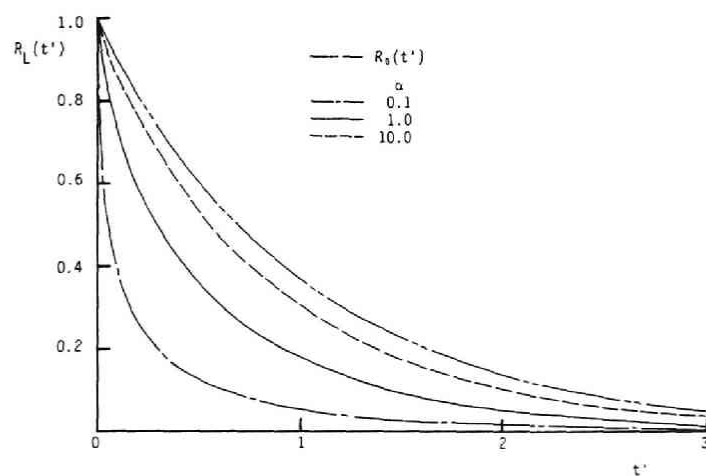


図1.6 α をパラメータとした Lagrange 的相関係数

$$\frac{1}{2} \frac{d\langle X^2(t') \rangle'}{dt'} \rightarrow \frac{T_L}{T_0} \quad (t' \rightarrow \infty)$$

から T_L/T_0 を求め図1.7に示した。この図より $\alpha \rightarrow \infty$ のとき $T_L/T_0 \rightarrow 1$ となる様子がわかり、 $\alpha > 10$ ではほぼ $T_L/T_0 \doteq 1$ と考えることができる。

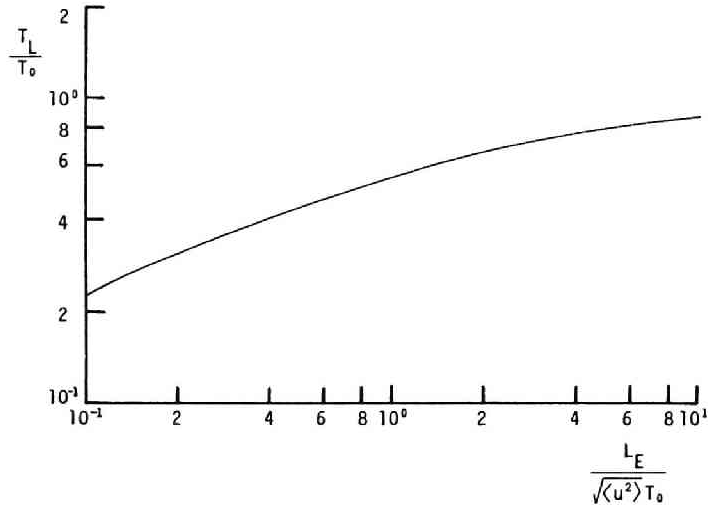


図1.7 T_L/T_0 と α の関係

先に述べたように、Lagrange 的時間スケールと Euler 的乱れ特性量の関係は

$$\frac{T_L}{T_E} = c \frac{U_0}{\sqrt{\langle u^2 \rangle}} \quad (1.38)$$

の形でまとめられることが多く¹³⁾、 c の値は0.4程度と考えられている。次に (1.38) 式と本研究の結果との関係について考えよう。

用いたモデルの T_E 、 T_0 の間には (1.28) 式の関係があるため、 T_L/T_0 と α の関係を $T_L/T_0 = f(\alpha)$ とおけば

$$\frac{T_L}{T_E} = \frac{T_L}{T_0} \cdot \frac{T_0}{T_E} = \frac{f(\alpha)}{g(\beta)} \quad (1.39)$$

となる。 α と β には

$$\alpha = \frac{U_0}{\sqrt{\langle u^2 \rangle}} \frac{1}{\beta} \quad \left(\beta = \frac{U_0 T_0}{L_E} \right) \quad (1.40)$$

の関係があるため、 $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ と β の関係がわかれば、 T_L/T_E を $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ で表示できる。いま、 β をパラメータとして T_L/T_E と $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ の関係を図1.8に示した。

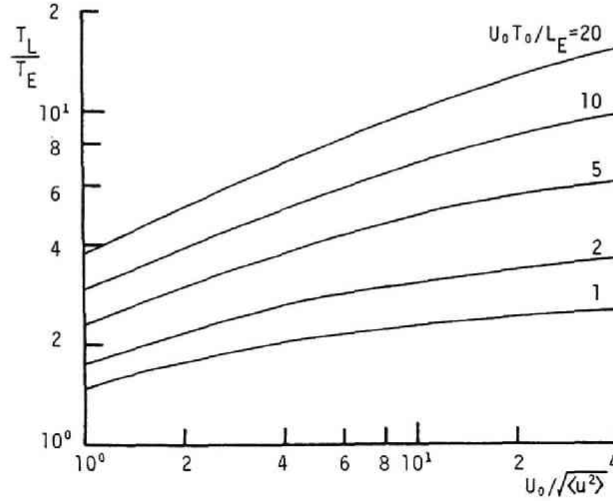


図1.8 β をパラメータとした T_L/T_E と $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ の関係

(2) 開水路流れの乱流拡散現象への適用

次に、開水路流れの乱流計測に関する従来成果を用いて、本研究の実際現象への適用について検討する。

T_0 としては、浅野¹⁴⁾ が最適相関係数の積分スケールを移流速度で除して得た時間スケールを用いる。 $\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ 、 L_E についても浅野の提案する実験式を用いれば次のようになる。

$$\sqrt{\langle u^2 \rangle} = 0.42\eta^{-1/3}u_* \left(\frac{U}{u_*}\right)^{1/3} \quad (0.1 < \eta < 0.6)$$

$$= 0.35\eta^{-2/3}u_* \left(\frac{U}{u_*}\right)^{1/3} \quad (0.6 < \eta < 0.9)$$

$$L_{Ex} = 0.115h \left(\frac{U}{u_*}\right) \quad (0.1 < \eta < 0.9)$$

$$T_0 = 0.120\eta^{1/3} \frac{h}{u_*} \left(\frac{U}{u_*}\right)^{2/3} \quad (0.1 < \eta < 0.6)$$

$$= 0.145\eta^{2/3} \frac{h}{u_*} \left(\frac{U}{u_*}\right)^{2/3} \quad (0.6 < \eta < 0.9)$$

これらは流れ方向の乱れ速度に関するものである。また、 u_* は摩擦速度、 U は η での平均流速、 h は水深、 η は相対水深である。 L_E の添字 x は、流れ方向の乱れ速度の流れ方向の積分スケールを

意味している。

上記の実験式を用いれば、

$$\alpha = \frac{U_0}{\sqrt{\langle u^2 \rangle}} \cdot \frac{1}{\beta} = 2.28 \quad (0.1 < \eta < 0.6)$$

$$= 2.27 \quad (0.6 < \eta < 0.9)$$

となることがわかる。そこで、 $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle} = 2.27\beta$ として (1.39), (1.40) 式より求めた T_L/T_E と $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ の関係を示せば図1.9のようになる。図中には、(1.38) 式で $C = 0.40$ とした関係も示した。開水路流れでは $U/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ は10~20程度と考えられ、その範囲では両者はほぼ同じ値となっている。

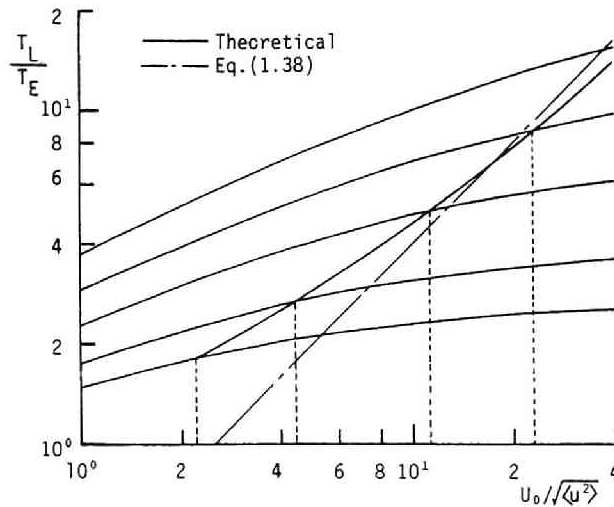


図1.9 T_L/T_E と $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ の関係

この結果を、Engelund¹⁵⁾、Iwasa・Imamoto¹⁶⁾によって計測された開水路流れ自由表面上の固体粒子の流れ方向乱流拡散係数に適用してみよう。 $\eta = 1$ での $\langle u^2 \rangle$ の値を浅野の提案する $0.6 < \eta < 0.9$ の式を用いて推定し、各々の実験より得られた乱流拡散係数 D_x を $\langle u^2 \rangle$ で除することにより T_L を求める。(ただし、形状比 B/h が10以上の資料を用いる。) T_E を浅野の提案する $T_E = 0.115h/u_*$ で推定した後、 T_L/T_E と $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ の関係を示したのが図1.10であり、先に示した関係とよく適合している。

乱れの空間的積分スケール L_E が、一般に乱れ強さ $\langle u^2 \rangle$ あるいは乱れエネルギー k と乱れエネルギー散逸率 ϵ で構成されるとすれば、 L_E の表示として次式が考えられる。

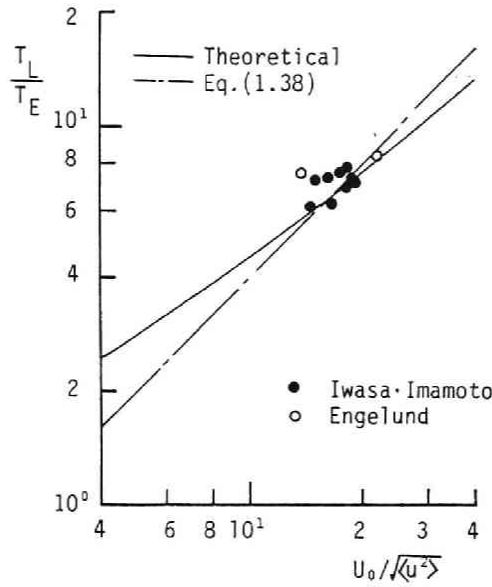


図1.10 T_L/T_E と $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ の関係の検証

$$L_E = a \frac{\langle u^2 \rangle^{3/2}}{\epsilon} \quad \text{or} \quad a \frac{k^{3/2}}{\epsilon}$$

上式を, $U_0 T_E = L_E$ を仮定した (1.38) 式に代入すれば,

$$T_L = a \cdot c \frac{\langle u^2 \rangle}{\epsilon} \quad \text{or} \quad a \cdot c \frac{k}{\epsilon} \cdot \frac{k^{1/2}}{\sqrt{\langle u^2 \rangle}}$$

となり, 乱流拡散係数 $D_x = \langle u^2 \rangle T_L$ として

$$D_x = a \cdot c \frac{\langle u^2 \rangle k}{\epsilon} \cdot \frac{\langle u^2 \rangle}{k} \quad \text{or} \quad a \cdot c \frac{\langle u^2 \rangle k}{\epsilon} \frac{k^{1/2}}{\sqrt{\langle u^2 \rangle}}$$

が得られる。開水路流れのように $\langle u^2 \rangle/k \cong 1$ 程度のときには¹⁷⁾, 両者は同一となり, $a = 1.7$ 程度であるから¹⁰⁾, 定数も含めて D_x として次式が得られる。

$$D_x = C_x \frac{\langle u^2 \rangle k}{\epsilon} \quad (C_x \cong 0.7) \quad (1.41)$$

(1.42) 式は Launder¹⁹⁾ が応力モデルを用いて導いた結果と同様である。

このように, 主流方向の乱流拡散係数に対しては, (1.38) 式を適用することができるが, 主流に直交する方向の乱流拡散に対してはこのような関係を用いることはできず, 図1.7に示した T_L/T_0 と

$L_E/\sqrt{\langle u^2 \rangle} T_0$ の関係に戻る必要がある。Baldwin・Mickelson¹⁸⁾ は、一様乱流中の時空間相関係数と主流に直交する方向の乱流拡散係数を計測しており、その実験結果を示したのが図1.11である。実験結果は本章での解析結果とほぼ適合している。

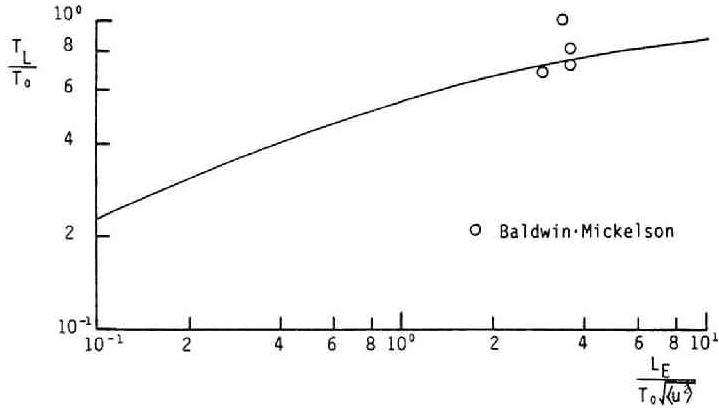


図1.11 T_L/T_0 と α の関係の検証

1.4 結語

本章では減衰しない一様乱流中の乱流拡散係数が Euler 的乱れ特性量によりどのように構成されるかについて検討した。得られた結論は次のようになる。

- ① Taylor の拡散理論と Corrsin の関係式を連立することにより、Lagrange 的時間スケールと Euler 的乱れ特性量の関係を導くことができる。その際、乱れの空間的積分スケール L_E 、乱れ強さ $\langle u^2 \rangle$ 、流下座標系での乱れの時間的積分スケール T_0 で構成される無次元量 $\alpha = L_E/\sqrt{\langle u^2 \rangle} T_0$ を導入し、Lagrange 的時間スケール T_L と α の関係を図1.7に示した。 $\alpha > 10$ で $T_L/T_0 \doteq 1$ と考えることができる。
- ② 用いた乱流場のモデルでは、固定点での計測より得られる時間的積分スケール T_E と T_0 の比 T_E/T_0 が無次元量 $\beta = U_0 T_0/L_E$ の関数となるため、 T_L/T_E が α と β あるいは $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ 、 β の関数となることを示し、 β をパラメータとして T_L/T_E と $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ の関係を図1.9に示した。
- ③ 主流方向の乱流拡散係数に関する従来の実験結果が図1.9に示した解析結果にはほぼ適合することを示した。一方、主流に直交する方向の乱流拡散に関しては、 T_L/T_0 と $L_E/\sqrt{\langle u^2 \rangle} T_0$ の関係を示した図1.7を用いる必要がある。図1.7と Baldwin・Mickelson の実験結果を比較した結果、両者はほぼ適合した。ただし、この関係を用いるには、計測の困難な T_0 が必要であり、実際の適用が難しい。また、主流方向とそれに直交する方向を別々に取り扱っているため、両者の乱流拡散係数の

関連も明らかでない。このような問題点を解決するために、次に一次元場の解析を二次元場に拡張する必要がある。

参考文献

- 1) Hay, J. S. and Pasquill, F. : Diffusion from a continuous source in relation to the spectrum and scale of turbulence, *Advances in Geophysics*, Vol. 6, pp. 345-364, 1959.
- 2) Angell, J. K. : Measurements of Lagrangian and Eulerian properties of turbulence at a height of 2,500 ft., *Quart. J. Roy. Meteorological Soc.*, Vol. 90, No. 386, pp. 57-71, 1964.
- 3) Corrsin, S. : Estimates of the relation between Eulerian and Lagrangian scales in large Reynolds number turbulence, *J. Atmospheric Sci.*, Vol. 20, pp. 115-119, 1963.
- 4) Wandel, C. F. and Kafoed-Hansen, O. : On the Eulerian-Lagrangian transform in the statistical theory of turbulence, *J. Geophysical Research*, Vol. 67, No. 8, pp. 3089-3092, 1962.
- 5) Taylor, G. I. : Diffusion by continuous movement, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, Vol. 20, pp. 196-211, 1921.
- 6) Saffman, P. G. : An approximate calculation of the Lagrangian auto-correlation coefficient for stationary homogeneous turbulence, *Appl. Sci. Res. A*, Vol. 11, pp. 245-255, 1963.
- 7) Corrsin, S. : Progress report on some turbulent research, *Advances in Geophysics*, Vol. 6, Academic Press, pp. 161-164, 1959.
- 8) 岩佐義朗, 細田 尚, 余越正一郎 : 乱流拡散係数とオイラー的乱れ特性量の関係に関する基礎的研究, *土木学会論文集*, 第357号/Ⅱ-3, pp. 89-95, 1985.
- 9) Chatwin, P. C. : The initial development of longitudinal dispersion in straight tubes, *J. Fluid Mech.*, Vol. 80, part 1, pp. 33-48, 1977.
- 10) 今本博健, 上野鉄男, 浅野富夫 : 開水路流れにおける乱れの空間構造について(3), *京都大学防災研究所年報* 第16号 B2, pp. 505-519, 1973.
- 11) 今本博健 : 開水路流れの乱れに関する水理学的研究, *京都大学学位論文*, 1971.
- 12) Shlien, D. J. and Corrsin, S. : A measurement of Lagrangian velocity auto correlation in approximately isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, Vol. 62, pp. 255-271, 1974.
- 13) 日野幹雄 : 乱流拡散における Lagrange 相関と Euler 相関の関係, *土木学会誌*, 1975年11月, pp. 65-71.
- 14) 浅野富夫 : 開水路流れにおける乱れの時空間構造に関する研究, *京都大学学位論文*, 1980.
- 15) Engelund, F. : Dispersion of floating particles in uniform channel flow, *J. Hydraulics Div., ASCE*, Vol. 95, HY4, pp. 1149-1162, 1969.
- 16) Iwasa, Y. and Imamoto, H. : Dispersive characteristics of free surface flow in term of Lagrangian

descriptions, Proc. 13th Congress of IAHR, Kyoto, A14, pp. 109-118, 1969.

17) 柅津家久：開水路流れの乱流構造に関する基礎的研究，京都大学学位論文，1977.

18) Baldwin, L. V. and Mickelsen, W. R. : Turbulent diffusion and anemometer measurements, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 88, EM2, pp. 37-69, 1962.

第2章 二次元解析モデル

第1章に示した乱流拡散現象に関するモデルは一次元場を対象としており、空間の方向によって乱れ強さ、空間的積分スケール等が異なる場合への適用が難しい。本章では、前章の解析モデルの二次元場への拡張を試み、乱流拡散係数に及ぼす乱れ特性量の異方性の効果について検討する。

Launder¹⁾は、流れに垂直な二方向 (y, z 方向) の乱流拡散係数 D_y, D_z の比に関して、代数応力モデルによって得られる $D_z/D_y = \langle w^2 \rangle / \langle v^2 \rangle$ ($\langle v^2 \rangle, \langle w^2 \rangle$; y, z 方向の乱れ強さ) と、管路流の計測結果を比較している。 $\langle w^2 \rangle / \langle v^2 \rangle$ が大きい領域で、 D_z/D_y は $\langle w^2 \rangle / \langle v^2 \rangle$ より非常に大きい値をとり、乱流モデルによっても異方性の強い場での乱流拡散係数の推定は容易ではない。本章では、第1章で示した解析法を二次元場へ拡張して、乱流拡散係数への異方性の効果についての考察を試みる。得られた結果を開水路流れの乱流拡散係数、Launder が用いた実験結果に適用し、その妥当性についても検討する。

2.1 基礎式

第1章で示した乱流拡散現象に関する解析モデルを、二次元場へ拡張するため、図2.1に示すような乱れ速度 u, w の時空間相関係数を考える。この $R_{Eu}(t, x, z | t_0, 0, 0)$ を、解析の簡便さも考慮して、今本・上野・浅野²⁾が最適相関係数に対して行っているのと類示の表示式

$$R_{Eu}(t, x, z | 0, 0, 0) = \exp\left(-\frac{|x - U_0 t|}{L_{xu}}\right) \exp\left(-\frac{|z|}{L_{zu}}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_{0z}}\right) \quad (2.1)$$

と表す。 w についても同様に

$$R_{Ew}(t, x, z | 0, 0, 0) = \exp\left(-\frac{|x - U_0 t|}{L_{xw}}\right) \exp\left(-\frac{|z|}{L_{zw}}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_{0z}}\right) \quad (2.2)$$

とおく。ここに、 L_{xu}, L_{zu} ; 各々、 u に関する x, z 方向の空間的積分スケール、 L_{xw}, L_{zw} ; 各々、 w に関する x, z 方向の空間的積分スケール、 T_{0z} ; 各々、 u, w の流下座標系での時間的積分スケールを表す。簡単のため、 $R_{Eu}(t, x, z | 0, 0, 0)$ 、 $R_{Ew}(t, x, z | 0, 0, 0)$ を $R_{Eu}(t, x, z)$ 、 $R_{Ew}(t, x, z)$ と表す。

一方、原点より時刻 $t = 0$ に放出された粒子の存在確率を、 $\xi = x - U_0 t$ を用いて二次元正規分布

$$C(t, \xi, z) = \frac{1}{2\pi(\langle \xi^2 \rangle \langle z^2 \rangle)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{\langle \xi^2 \rangle} + \frac{z^2}{\langle z^2 \rangle}\right)\right] \quad (2.3)$$

とおく。ここに、 $\langle \xi^2 \rangle, \langle z^2 \rangle$; 各々、粒子の存在確率密度関数の $\xi = 0, z = 0$ のまわりの分散を表す。

Lagrange 的時間相関係数と Euler 的時空間相関係数の関係を示す Corrisin 関係式は、二次元場で

は次式となる。

$$R_{Lx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int R_{Eu}(t, \xi, z) C(t, \xi, z) d\xi dz \quad (2.4-a)$$

$$R_{Lz}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int R_{Ew}(t, \xi, z) C(t, \xi, z) d\xi dz \quad (2.4-b)$$

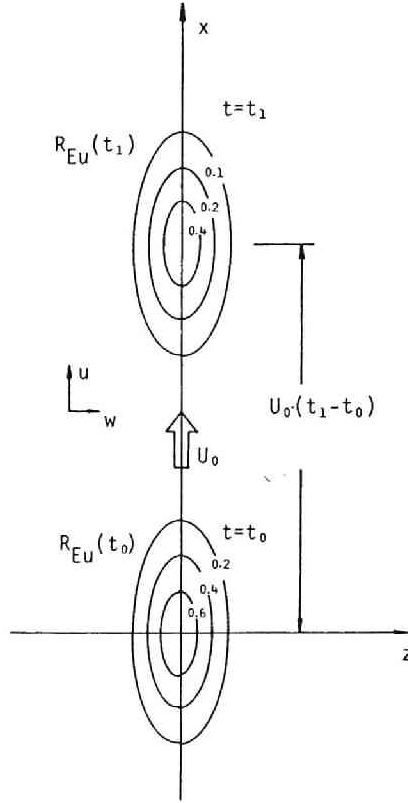


図2.1 二次元場での乱れの時空間相関係数のモデル

ここに、 R_{Lx} , R_{Lz} は各々 Lagrange 速度ベクトルの x , z 方向成分に関する Lagrange 的相関係数。

(2.4) 式に (2.1)~(2.3) 式を代入して次式が得られる。

$$R_{Lx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \exp\left(-\frac{|\xi|}{L_{xu}}\right) \exp\left(-\frac{|z|}{L_{zu}}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_{0x}}\right) \cdot \frac{1}{2\pi(\langle \xi^2 \rangle \langle z^2 \rangle)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{\langle \xi^2 \rangle} + \frac{z^2}{\langle z^2 \rangle}\right)\right] d\xi dz \quad (2.5)$$

$$R_{Lz}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\xi|}{L_{xu}}\right) \exp\left(-\frac{|z|}{L_{zu}}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_{0x}}\right) \cdot \frac{1}{2\pi(\langle \xi^2 \rangle \langle z^2 \rangle)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{\langle \xi^2 \rangle} + \frac{z^2}{\langle z^2 \rangle}\right)\right] d\xi dz \quad (2.6)$$

(2.5), (2.6) 式と次の Taylor の理論を連立することにより, $\langle \xi^2 \rangle$, $\langle z^2 \rangle$ の時間変化が求まることになる。

$$\langle \xi^2 \rangle = 2\langle u^2 \rangle \int_0^t (t-\tau) R_{Lx}(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

$$\langle z^2 \rangle = 2\langle w^2 \rangle \int_0^t (t-\tau) R_{Lz}(\tau) d\tau \quad (2.8)$$

ここに, $\langle u^2 \rangle$, $\langle w^2 \rangle$: 乱れ速度 u , w の変動強さ。

2.2 基礎式の無次元化と無次元パラメータ

第1章でも行ったように, 基礎式 (2.5)~(2.8) を無次元化することにより無次元パラメータを導入く。まず, 次のような無次元量を導入する。

$$\xi' = \frac{\xi}{L_{xu}}, \quad z' = \frac{z}{L_{zu}}, \quad t' = \frac{t}{T_{0x}}, \quad \langle \xi^2 \rangle' = \frac{\langle \xi^2 \rangle}{\langle u^2 \rangle T_{0x}^2}, \quad \langle z^2 \rangle' = \frac{\langle z^2 \rangle}{\langle w^2 \rangle T_{0x}^2}$$

このとき, (2.5)~(2.8) 式は次のように表せる。

$$R_{Lx}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{L_{xu}}{\sqrt{\langle u^2 \rangle} T_{0x}} \frac{L_{zu}}{\sqrt{\langle w^2 \rangle} T_{0x}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|\xi'|) \exp(-|z'|) \exp(-t') \cdot \frac{1}{\sqrt{\langle \xi'^2 \rangle \langle z'^2 \rangle}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{L_{xu}^2}{\langle u^2 \rangle T_{0x}^2} \frac{\xi'^2}{\langle \xi'^2 \rangle} + \frac{L_{zu}^2}{\langle w^2 \rangle T_{0x}^2} \frac{z'^2}{\langle z'^2 \rangle}\right)\right] d\xi' dz' \quad (2.9)$$

$$R_{Lz}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{L_{xu}}{\sqrt{\langle u^2 \rangle} T_{0x}} \frac{L_{zu}}{\sqrt{\langle w^2 \rangle} T_{0x}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{L_{xu}}{L_{xu}} |\xi'| \right) \exp\left(-\frac{L_{zu}}{L_{zu}} |z'| \right) \exp\left(-t' \cdot \frac{T_{0x}}{T_{0x}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\langle \xi'^2 \rangle \langle z'^2 \rangle}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{L_{xu}^2}{\langle u^2 \rangle T_{0x}^2} \frac{\xi'^2}{\langle \xi'^2 \rangle} + \frac{L_{zu}^2}{\langle w^2 \rangle T_{0x}^2} \frac{z'^2}{\langle z'^2 \rangle}\right)\right] d\xi' dz' \quad (2.10)$$

$$\langle \xi^2 \rangle' = 2 \int_0^t (t'-\tau') R_{Lx}(\tau') d\tau' \quad (2.11)$$

$$\langle z^2 \rangle' = 2 \int_0^t (t'-\tau') R_{Lz}(\tau') d\tau' \quad (2.12)$$

このように, 次のような無次元パラメータが現れる。

$$\alpha = \frac{L_{xu}}{\sqrt{\langle u^2 \rangle T_{0x}}}, \quad \gamma = \frac{L_{zu}}{L_{xu}}, \quad \delta = \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle w^2 \rangle},$$

$$a = \frac{L_{xu}}{L_{xw}}, \quad b = \frac{L_{zu}}{L_{zw}}, \quad c = \frac{T_{0x}}{T_{0z}}$$

上記の記号を用いて (2.11), (2.12) 式を書き改めれば次のようになる。

$$R_{Lx}(t') = \frac{\alpha^2 \gamma \sqrt{\delta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|\xi'|) \exp(-|z'|) \exp(-t') \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{\langle \xi^2 \rangle' \langle z^2 \rangle'}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\alpha^2 \frac{\xi'^2}{\langle \xi^2 \rangle'} + \alpha^2 \gamma^2 \delta \frac{z'^2}{\langle z^2 \rangle'} \right)\right] d\xi' dz' \quad (2.13)$$

$$R_{Lz}(t') = \frac{\alpha^2 \gamma \sqrt{\delta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a|\xi'|) \exp(-b|z'|) \exp(-ct') \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{\langle \xi^2 \rangle' \langle z^2 \rangle'}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\alpha^2 \frac{\xi'^2}{\langle \xi^2 \rangle'} + \alpha^2 \gamma^2 \delta \frac{z'^2}{\langle z^2 \rangle'} \right)\right] d\xi' dz' \quad (2.14)$$

(2.13), (2.14) 式は、積分することにより

$$R_{Lx}(t') = \frac{4}{2\pi} \alpha^2 \gamma \sqrt{\delta} \frac{\exp(-t')}{\sqrt{\langle \xi^2 \rangle' \langle z^2 \rangle'}} \frac{\exp[1/(4\alpha^2/2\langle \xi^2 \rangle')]}{\alpha/\sqrt{2\langle \xi^2 \rangle'}} \frac{\exp[1/(4\alpha^2 \gamma^2 \delta/2\langle z^2 \rangle')]}{\alpha \gamma \sqrt{\delta}/\sqrt{2\langle z^2 \rangle'}} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\alpha/\sqrt{2\langle \xi^2 \rangle'}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\alpha \gamma \sqrt{\delta}/\sqrt{2\langle z^2 \rangle'}}\right) \quad (2.15)$$

$$R_{Lz}(t') = \frac{4}{2\pi} \alpha^2 \gamma \sqrt{\delta} \frac{\exp(-ct')}{\sqrt{\langle \xi^2 \rangle' \langle z^2 \rangle'}} \frac{\exp[a^2/(4\alpha^2/2\langle \xi^2 \rangle')]}{\alpha/\sqrt{2\langle \xi^2 \rangle'}} \frac{\exp[b^2/(4\alpha^2 \gamma^2 \delta/2\langle z^2 \rangle')]}{\alpha \gamma \sqrt{\delta}/\sqrt{2\langle z^2 \rangle'}} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\alpha/\sqrt{2\langle \xi^2 \rangle'}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\alpha \gamma \sqrt{\delta}/\sqrt{2\langle z^2 \rangle'}}\right) \quad (2.16)$$

となる。

2.3 解析方法と計算条件

基礎式 (2.11), (2.12), (2.15), (2.16) の解析方法は第 1 章で用いたものと同様である。すなわち、 $t' \rightarrow 0$ において成立する。

$$\langle \xi^2 \rangle' = t'^2, \quad \langle z^2 \rangle' = t'^2 \quad (2.17)$$

を 1 step の $\langle \xi^2 \rangle'$, $\langle z^2 \rangle'$ として (2.15), (2.16) 式に代入して 1 step の $R_{Lx}(t')^{(1)}$, $R_{Lz}(t')^{(1)}$ を求め、これを用いて (2.11), (2.12) 式より 2 step の $\langle \xi^2 \rangle'^{(2)}$, $\langle z^2 \rangle'^{(2)}$ を求める。この操作を、 R_{Lx} , R_{Lz} , $\langle \xi^2 \rangle'$, $\langle z^2 \rangle'$ が収束するまで繰り返した。

計算を行うに際し、無次元パラメータを次のように設定した。 α は第1章で述べたことにより、 $\alpha = 2.27$ とした。 γ は浅野の研究によれば0.1~0.2程度であり、 b はほぼ1となることが指摘されている³⁾。また、 a は宇民・上野の研究によれば2.0程度となることが指摘されている⁴⁾。問題となるのが c の設定であって、次元的考察により $T_{0x} \propto \langle u^2 \rangle / \epsilon$ 、 $T_{0z} \propto \langle w^2 \rangle / \epsilon$ と考えれば $c \propto \langle u^2 \rangle / \langle w^2 \rangle$ となる。より一般的には $\langle u^2 \rangle / \langle w^2 \rangle$ の関数と考えられ、本研究では $\langle u^2 \rangle / \langle w^2 \rangle = 1$ のとき $c = 1$ となるように、 c を

$$c = \left(\frac{\langle u^2 \rangle}{\langle w^2 \rangle} \right)^m \quad (2.18)$$

と表す。 m をパラメータとし、乱流拡散係数に関する従来の実験結果より m の値を同定することにする。

δ は、開水路流れを対象とするとき祢津の研究⁵⁾より $\delta \doteq 2$ 程度の値となる。本研究では、Run 1 ~ 8 において $\delta = 2.0$ とし、Run 9 ~ 13では乱流拡散係数に及ぼす δ の影響を検討するため、 δ を1 ~ 2まで変化させた。このとき、 $\delta = 1$ で $T_{Lx}/T_{Lz} = 1$ となるように、 $a = \delta$ としている。これらのパラメータを表2.1に示した。

表2.1 解析のパラメータ

	α	γ	δ	a	b	c	m
Run 1	2.28	0.1-0.4	2.0	2.0	1.0	2.0	1.0
Run 2	2.28	0.1-0.4	2.0	2.0	1.0	4.0	2.0
Run 3	2.28	0.3	1.0-2.0	$a=\delta$	1.0	$c=\delta$	1.0

$$\alpha = \frac{L_{xu}}{\sqrt{\langle u^2 \rangle} T_{0x}}, \quad \gamma = \frac{L_{zu}}{L_{xu}}, \quad \delta = \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle w^2 \rangle}, \quad a = \frac{L_{xu}}{L_{xw}}, \quad b = \frac{L_{zu}}{L_{zw}}, \quad c = \frac{T_{0x}}{T_{0z}} = \left(\frac{\langle u^2 \rangle}{\langle w^2 \rangle} \right)^m$$

2.4 計算結果の考察

Lagrange 的相関係数の計算結果を図2.2に示した。この計算条件では R_{Lx} が R_{Lz} よりかなり大きく、異方性の効果が顕著である。これらの計算結果より、無次元化 Lagrange 的時間スケール T_{Lx}/T_{0x} 、 T_{Lz}/T_{0z} を求めた。

次に、第1章と同様に、(2.1) 式を $x = 0$ 、 $z = 0$ において t に関して積分すると、 u についての無次元化 Euler 的時間スケールと無次元パラメータ $\beta = T_{0x} U_0 / L_{xu}$ の関係

$$\frac{T_{Eu}}{T_{0x}} = \frac{1}{1+\beta} \quad \left(\beta = \frac{T_{0x} U_0}{L_{xu}} \right) \quad (2.19)$$

が得られる。

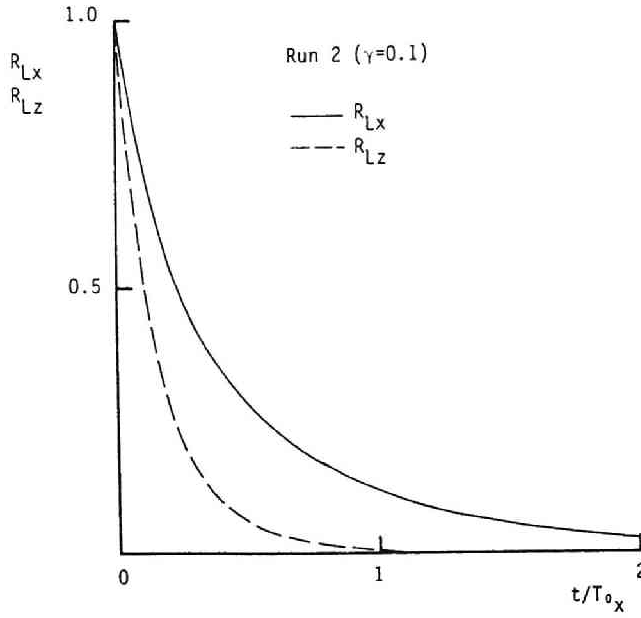


図2.2 Lagrange 的相関係数の計算例

(2.19) 式と

$$\alpha = \frac{U_0}{\sqrt{\langle u^2 \rangle}} \cdot \frac{1}{\beta} \quad (2.20)$$

を用いて、 T_{Lx}/T_{Eu} と $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ の関係を求めたのが図2.3, 2.4である。 T_{Lx}/T_{Eu} は、第1章でも述べたように m の値によらず $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ についてほぼ線形となっている。また、 $T_{Lx}/T_{Eu} = 0.4 U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ よりも若干小さくなっており、時空間相関係数の近似関数を改善する必要性を示している。次に、 x 方向と z 方向の乱流拡散係数の比

$$\frac{D_x}{D_z} = \frac{\langle u^2 \rangle \cdot T_{Lx}/T_{0x}}{\langle w^2 \rangle \cdot T_{Lz}/T_{0x}} \quad (2.21)$$

を示したのが図2.5である。開水路流れ自由表面上での乱流拡散係数の値については、次のような知見が得られている。流れ方向の乱流拡散係数 D_{xs} については、Iwasa・Imamoto の実験結果より D_{xs}/hu_* が0.5～0.7程度の値をとる。一方、水路幅方向の D_{zs} については、従来の実験結果を示した図2.6より、 D_{zs}/hu_* がほぼ0.2となる。この値は、第3章で検討するように、流水中に放出され

たトレーサーに対する D_z/hu_* の上限値であり、妥当な値と考えられる。すなわち、開水路流れ自由表面上では、 D_{xs}/D_{zs} の値は2.5~3.5となる。よって、図2.5をみてわかるように、 $m = 1$ が妥当であり、 $T_{0x}/T_{0z} = \langle u^2 \rangle / \langle w^2 \rangle$ と考えられる。

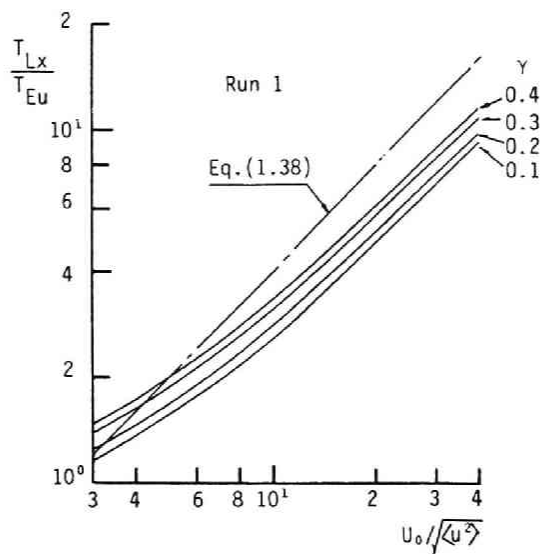


図2.3 T_{Lx}/T_{Eu} と $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ の関係 (Run 1)

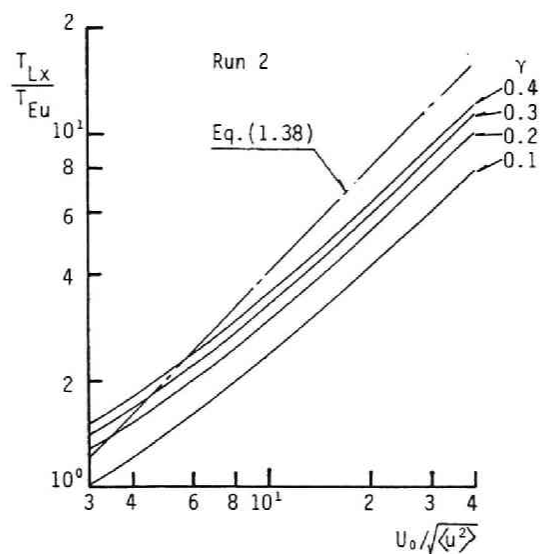


図2.4 T_{Lx}/T_{Eu} と $U_0/\sqrt{\langle u^2 \rangle}$ の関係 (Run 2)

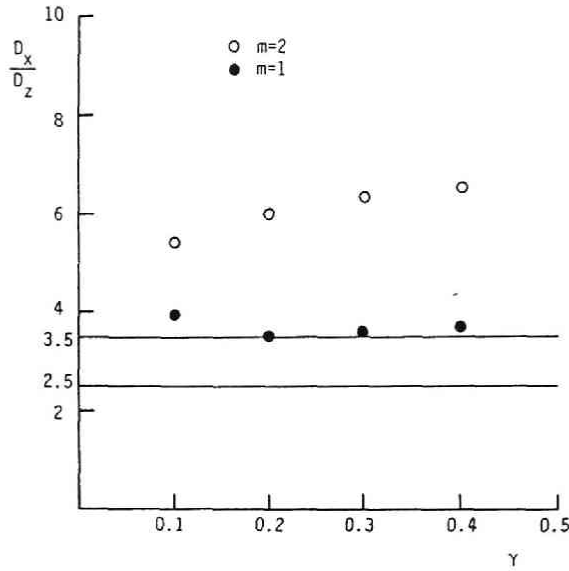


図2.5 m をパラメータとした D_x/D_z の値

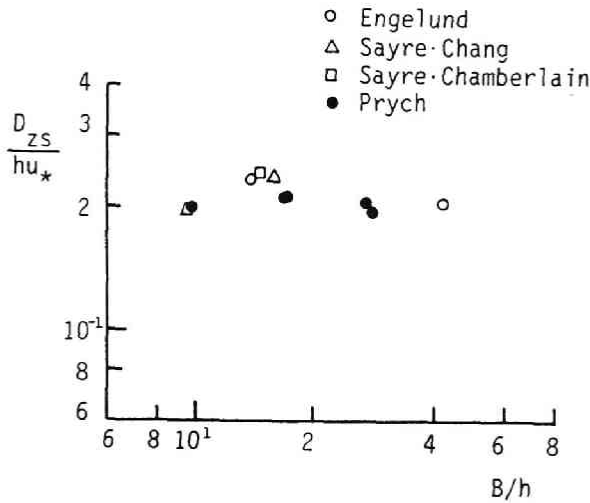


図2.6 D_{zs}/hu_* に関する実験結果

この結果を用いて乱れ強さの比 δ を変化させたときの乱流拡散係数，あるいは Lagrange 的時間スケールの比の変化を，図2.7に示した。ただし， $\delta = 1$ のとき $T_{Lx}/T_{Lz} = 1$ となり， $\delta = 2$ のとき $a = 2$ となるように $a = \delta$ としている。 T_{Lx}/T_{Lz} は， δ に対して線形に増加しており，

$$\frac{T_{Lx}}{T_{Lz}} = 0.2 + 0.8 \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle w^2 \rangle} \quad (2.22)$$

と近似できる。これを (2.21) 式を用いて乱流拡散係数の比に書き直せば、

$$\frac{D_x}{D_z} = \frac{\langle u^3 \rangle}{\langle w^3 \rangle} \left(0.2 + 0.8 \frac{\langle u^3 \rangle}{\langle w^3 \rangle} \right) \quad (2.23)$$

となる。 $\langle u^3 \rangle / \langle w^3 \rangle$ が小さい領域では、 D_x / D_z は乱れ強さの比 $\langle u^3 \rangle / \langle w^3 \rangle$ の増加に伴い線形に増加し、 $\langle u^3 \rangle / \langle w^3 \rangle$ の大きい領域では $\langle u^3 \rangle / \langle w^3 \rangle$ の 2 乗に比例して増加することを示している。

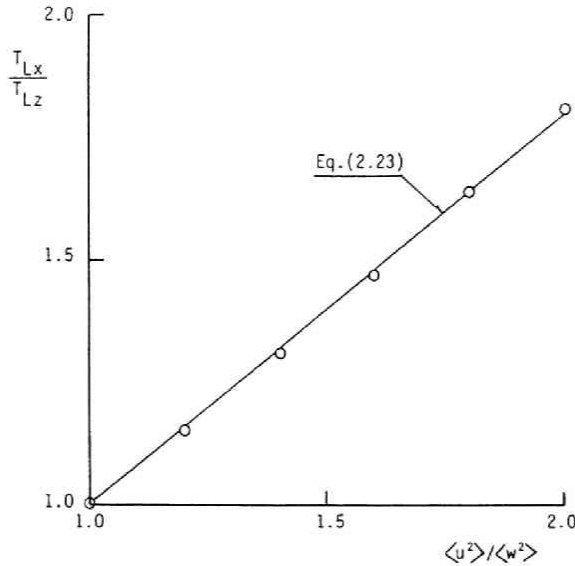


図2.7 T_{Lx}/T_{Lz} と $\langle u^3 \rangle / \langle w^3 \rangle$ の関係

仮に、(2.23) 式を水路幅方向と水深方向の乱流拡散係数に適用してみると次のようになる。開水路流れの水深方向の乱流拡散係数 D_y は、Jobson・Sayre⁷⁾により

$$\frac{D_y}{hu_*} = \kappa \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (2.24)$$

となることが確められている。この水深平均値は $\overline{D_y} / hu_* = \kappa / 6$ である。また、水深方向の乱れ強さ $\langle v^3 \rangle$ と $\langle w^3 \rangle$ の比は、祢津の研究により $\langle w^3 \rangle / \langle v^3 \rangle \cong 1.65$ であり、 D_z の水深平均値 $\overline{D_z}$ は第3章で示すように $D_z / hu_* \cong 0.15$ 程度である。よって、 $\overline{D_z} / \overline{D_y} = 0.15 / (\kappa / 6) = 2.25$ は $\langle w^3 \rangle / \langle v^3 \rangle = 1.65$ を (2.23) 式に代入して得られる $\overline{D_z} / \overline{D_y} = 2.51$ と同様の値となっている。

さらに、 D_x の水深平均値を、第2編第2章に示した D_x の分布形より $D_x = 0.8 \cdot D_{xs}$ と定め、 D_x / D_y を推定すれば7.2となる。これらの乱流拡散係数比と乱れ強さの比の関係を示したのが図2.8であり、(2.23) 式にはほぼ適合していることがわかる。

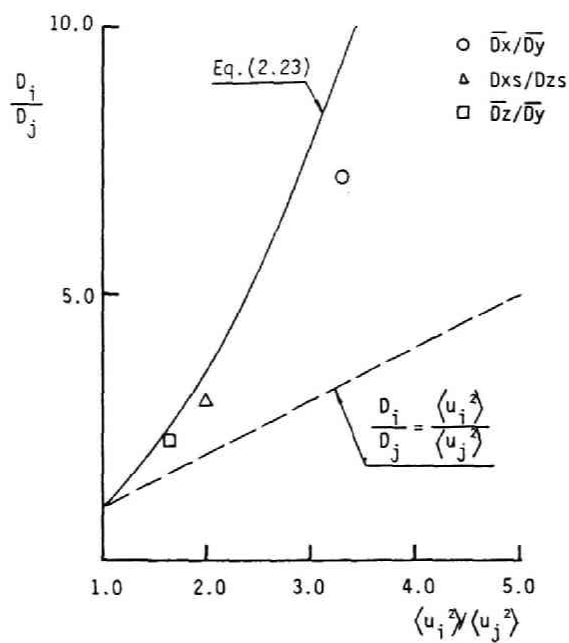


図2.8 乱流拡散係数の比と乱れ強さの比の関係
(開水路流れの実験値との比較)

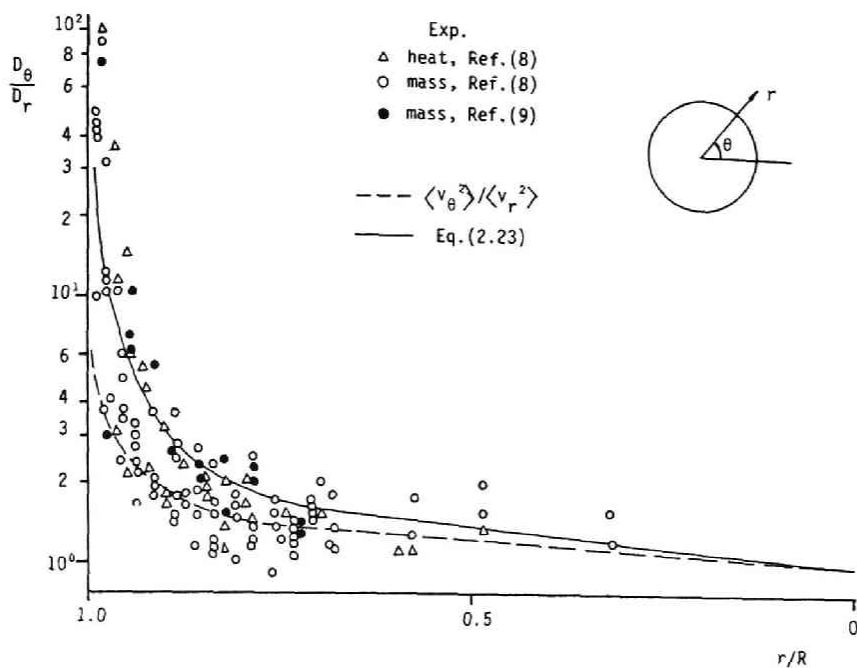


図2.9 乱流拡散係数の比と乱れ強さの比の関係
(管路流れの実験値との比較)

Lauder¹⁾は、管路内で計測された半径方向と円周方向の拡散係数^{8,9)}の比 D_θ/D_r を乱れ強さの比 $\langle v_\theta^2 \rangle / \langle v_r^2 \rangle$ と比較し、図2.9を示している。 $\langle v_\theta^2 \rangle / \langle v_r^2 \rangle$ は D_θ/D_r の下限となり、 $\langle v_\theta^2 \rangle / \langle v_r^2 \rangle$ の増加とともに D_θ/D_r が非常に大きくなっている。図中に示した (2.23) 式は $\langle v_\theta^2 \rangle / \langle v_r^2 \rangle$ の大きい領域の D_θ/D_r の挙動をほぼ再現しているように思われる。

(2.23) 式と応力モデルの解析結果を用いた乱流拡散係数の推定法については、第2編第2章で検討する。

2.5 結語

本章では、第1章で検討した乱流拡散係数と Euler 的乱れ特性量の関係についてのモデルの二次元場への拡張を試みた。解析方法は第1章と同様であり、計算条件を開水路流れの乱流計測結果に合せて計算を行った。その結果、 $T_{\theta x}/T_{\theta z} = \langle u^2 \rangle / \langle w^2 \rangle$ としたとき開水路流れ自由表面上の乱流拡散係数 D_x 、 D_z を推定できることがわかった。また、乱流拡散係数の比 D_i/D_j が乱流場の異方性のパラメータ $\langle u_i^2 \rangle / \langle u_j^2 \rangle$ の関数として

$$\frac{D_i}{D_j} = \frac{\langle u_i^2 \rangle}{\langle u_j^2 \rangle} \cdot \left(0.2 + 0.8 \frac{\langle u_i^2 \rangle}{\langle u_j^2 \rangle} \right) \quad (2.23)$$

と表せることを示し従来の実験結果よりその妥当性を検討した。

参考文献

- 1) Launder, B. E. : Heat and Mass Transport, Topics in Applied Physics, Vol. 12, Turbulence, edited by P. Bradshaw, Springer-Verlag, pp. 232-287, 1978.
- 2) 今本博健, 上野鉄男, 浅野富夫: 開水路流れにおける乱れの空間構造について(3), 京都大学防災研究所年報 第16号 B2, pp. 505-519, 1973.
- 3) 浅野富夫: 開水路流れにおける乱れの時空間構造に関する研究, 京都大学学位論文, 1980.
- 4) Utami, T. and Ueno, T. : Experimental study on the coherent structure of turbulent open channel flow using visualization and picture processing, J. Fluid Mech., Vol. 174, pp. 399-440, 1987.
- 5) 柁津家久: 開水路流れの乱流構造に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 1977.
- 6) Iwasa, Y. and Imamoto, H. : Dispersive characteristics of free surface flow in term of Lagrangian descriptions, Proc. 13th Congress of IAHR, Kyoto, A14, pp. 109-118, 1969.
- 7) Jobson, H. E. and Sayre, W. W. : Vertical transfer in open channel flow, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol. 96, pp. 707-724, 1970.
- 8) Quarmby, A. and Quirk, R. : Measurements of the radial and tangential eddy diffusivities of heat and mass in a plain tube, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp. 2309-2327, 1972.

- 9) Quarmby, A. and Quirk, R. : Axisymmetrical and non-axisymmetric turbulent diffusion in a plain circular tube at high schmit number, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 17, pp. 143-147, 1974.

第3章 粗・滑面水路の水路幅方向乱流拡散係数

第1, 2章では, 乱流拡散係数が Euler 的乱れ特性量によりどのように構成されるかを考察した。しかし, 濃度分布に関する資料を得ることができる場合には, 3.1節で述べるような濃度分布のモーメント特性より乱流拡散係数を推定し, それと水理量との関係が得られる。

本章では, 開水路流れの中に点源として連続的に放出された物質の乱流拡散係数について検討する。その前に, まず乱流拡散方程式のモーメント特性, すなわち濃度 C の分布形の時間・空間的な特性量の伝播特性についてまとめる。次に, 水路幅方向の乱流拡散係数と水理量の関係について検討するために行った実験の概要について述べる。実験の結果得られた濃度分布の伝播特性について簡単に考察した後, 水路幅方向の乱流拡散係数 D_z と無次元水理パラメータとの関係について検討する。水路の形状比 (アスペクト比) B/h が10程度より大きい場合を考え, D_z/hu_* と U/u_* (U : 断面平均流速) との関係について示す。さらに, 滑面では Reynolds 数, 粗面では相対粗度と D_z/hu_* との関係を考察する。

3.1 乱流拡散方程式のモーメント特性

本節では乱流拡散方程式の時間・空間的モーメント特性について簡単にまとめる。次節で平面二次元流れとしての取扱いをするので, 次の二次元乱流拡散方程式を考える。用いている座標系を図3.1に示す。

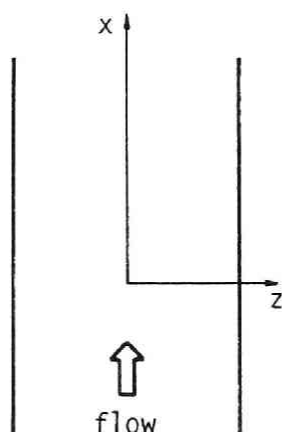


図3.1 座標系

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (3.1)$$

ここに、 C : 時間平均濃度、 U : 流速ベクトルの x 方向成分、 D_x , D_z : x , z 方向の乱流拡散係数。

物質の放出の方法は瞬間源と連続源に大別される。瞬間源の場合、 x , t に関する C のモーメント特性を考えるとときには、(3.1) 式を z に関して水路幅にわたって積分する。 z に関するモーメント特性を考えるとときには、 x に関して $-\infty$ から $+\infty$ まで積分する。各々次式となる。

$$\frac{\partial C_{z_0}}{\partial t} + U \frac{\partial C_{z_0}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C_{z_0}}{\partial x} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial C_{x_0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C_{x_0}}{\partial z} \right) \quad (3.3)$$

ここに、 C_{x_n} , C_{z_n} ($n = 0, 1, \dots$) は次式で定義される。

$$C_{x_n} = \int_{-\infty}^{\infty} C x^n dx, \quad C_{z_n} = \int_{-B/2}^{B/2} C z^n dz$$

(3.2) 式に x^n を乗じて $-\infty$ から ∞ まで積分すれば Aris のモーメント方程式¹⁾ となり、 t^n を乗じて 0 から ∞ まで積分すれば Tsai・Holley の時間に関するモーメント方程式²⁾ となる。各々、方程式とその解を示す。

(C_{z_0} の x に関するモーメント方程式)

$$\begin{aligned} \frac{dC_{z_0x_0}}{dt} &= 0, \quad \frac{dC_{z_0x_1}}{dt} = UC_{z_0x_0} \\ \frac{dC_{z_0x_n}}{dt} &= nUC_{z_0x_{n-1}} + n(n-1)D_x C_{z_0x_{n-2}} \quad (n = 2 \sim \infty) \end{aligned} \quad (3.4)$$

ただし、 $C_{z_0x_n} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{z_0} \cdot x^n dx$ である。

$t = 0$ で $C_{z_0x_1} = 0$ となるように原点を選び、 $t = 0$ で $C_{z_0x_0} = \alpha$, $C_{z_0x_2} = \beta$, $C_{z_0x_3} = \gamma$ とすれば、上式の解は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} C_{z_0x_0} &= \alpha, \quad C_{z_0x_1} = \alpha Ut, \\ C_{z_0x_2} &= \alpha U^2 t^2 + 2\alpha D_x t + \beta, \\ C_{z_0x_3} &= \alpha U^3 t^3 + 6\alpha D_x U t^2 + 3\alpha U t + \gamma \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

これより重心回りの分散、ひずみ度は

$$\sigma_x^2 = 2D_x t + \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.6)$$

$$s = \frac{\gamma/\alpha}{\sigma_x^3} \quad (3.7)$$

となる。

(C_{z_0} の t に関するモーメント方程式)

$$\begin{aligned} D_x \frac{d^2 C_{z_0 t_0}}{dx^2} - U \frac{dC_{t_0}}{dx} &= 0, \\ D_x \frac{d^2 C_{z_0 t_n}}{dx^2} - U \frac{dC_{z_0 t_n}}{dx} + n C_{z_0 t_{n-1}} &= 0 \quad (n = 1 \sim \infty) \end{aligned} \quad (3.8)$$

これは Tsai・Holley²⁾ が移流分散現象の解析に用いた方法を (3.2) 式に適用したものである。 $x = 0$ で $C_{z_0 t_0} = \alpha$, $C_{z_0 t_1} = \beta$, $C_{z_0 t_2} = \gamma$, $C_{z_0 t_3} = \delta$ とすれば、次のような解が得られる^{3,4)}。

$$\left. \begin{aligned} C_{z_0 t_0} &= \alpha, \quad C_{z_0 t_1} = \frac{\alpha}{U}x + \beta, \\ C_{z_0 t_2} &= \frac{\alpha}{U^2}x^2 + \left(\frac{2D_x\alpha}{U^3} + \frac{2\beta}{U}\right)x + \gamma, \\ C_{z_0 t_3} &= \frac{\alpha}{U^3}x^3 + \left(\frac{6D_x\alpha}{U^4} + \frac{3\beta}{U^2}\right)x^2 + \left(\frac{12D_x^2\alpha}{U^5} + \frac{6D_x\beta}{U^3} + \frac{3\gamma}{U}\right)x + \delta \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

重心まわりの分散 σ_t^2 , ひずみ度 s_t は次式となる。

$$\sigma_t^2 = \frac{2D_x}{U^3}x + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (3.10)$$

$$s_t = \left(\frac{12D_x^2}{U^5}x - \frac{3\beta\gamma}{\alpha^2} + \frac{2\beta^3}{\alpha^3} + \frac{\delta}{\alpha} \right) / \sigma_t^3 \quad (3.11)$$

(3.10), (3.11) 式は x が十分大きいとき

$$\sigma_t^2 = \frac{2D_x}{U^3}x, \quad s_t \doteq 3\sqrt{2}\sqrt{\frac{D_x}{Ux}}$$

となる。これらの結果は、(3.2) 式の瞬間源の解

$$C_{z_0} = \frac{U}{2\sqrt{\pi D_x t}} \exp\left[-\frac{(x-Ut)^2}{4D_x t}\right] \quad (3.12)$$

に Glover の積分⁵⁾を行うことによって得られ、次のようになる^{6,7)}。

$$\sigma_t^2 = \frac{2xD_x}{U^3} + \frac{8D_x^2}{U^4}, \quad s = \left(\frac{12D_x^2x}{U^5} + \frac{44D_x^3}{U^6} \right) / \sigma_t^3 \quad (3.13)$$

次に連続的に点源として放出される場合を考えよう。定常状態に達しているとし、Okoye⁸⁾と同様に (3.1) 式に z^n を乗じ水路幅にわたって積分する。ただし、水路側壁の影響がほとんどない領域に限る。先に定義した C_{zn} に関して次式が成立する。

$$\begin{aligned} U \frac{dC_{z0}}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(D_x \frac{dC_{z0}}{dx} \right), & U \frac{dC_{z1}}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(D_x \frac{dC_{z1}}{dx} \right), \\ U \frac{dC_{zn}}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(D_x \frac{dC_{zn}}{dx} \right) + n(n-1) D_z C_{z(n-2)} \quad (n = 2 \sim \infty) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$x = 0$ で $C_{z0} = \alpha$, $C_{z1} = 0$, $C_{z2} = \beta$, $C_{z3} = \gamma$ とし解けば

$$C_{z0} = \alpha, \quad C_{z1} = 0, \quad C_{z2} = \frac{2D_z \alpha}{U} x + \beta, \quad C_{z3} = \gamma \quad (3.15)$$

となり、分散 σ_z^2 は、次式で与えられる。

$$\sigma_z^2 = \frac{2D_z}{U} x \quad (3.16)$$

3.2 水路幅方向乱流拡散係数と水理量の関係⁹⁾

開水路等流中に、点源として連続的に放出された物質の乱流拡散機構については、Okoye⁸⁾をはじめとして多くの研究がなされてきた。とくに、水路幅方向の乱流拡散係数 D_z と水理量の関係を明らかにすることが主目的である。本研究では Aspect 比 B/h が10程度より大きいときを対象とし、今本¹⁰⁾が乱れ特性量、自由表面上の固体粒子の乱流拡散係数の整理に用いている U/u_* と D_z/hu_* の関係について検討を加える。さらに、滑面では Reynolds 数、粗面では相対粗度を用いて D_z/hu_* との関係を考察する。

(1) 実験の概要

実験は、京都大学土木総合館地階水理実験室において、長さ10m、幅25cmの長方形断面を有する水路を用いて行われた。(図3.2参照) 水路床は滑面・粗面のどちらかとし、粗度としては直径1mm、2mmのガラス球を用いた。

トレーサーとしては、食塩水(メチルアルコールで比重1.0に調整)を用い、水路上流端より3mの断面の中央に点源を設け、一定水頭の容器から連続的に放出した。濃度計測には導電率計(計測技研 MK-106)を用いた。

測定断面は、点源より20cm～80cm下流の断面から20cmまたは40cmの間隔であり、水深方向、水路幅方向に多点測定した。実験の水理諸量を表3.1に示す。粗面では粗度高さとして粒径 d を用い、路床基準面としては粒頂より $d/4$ 下った位置を用いた。図3.3に示した U/u_* と d/h の関係をみると、実験値(表2.1に示したものだけでなく、参考文献9で熱の拡散係数の推定に用いた資料も示し

である。)は粗面の抵抗則

$$\frac{U}{u_*} = A_r - \frac{1}{x} + \frac{2.3}{x} \log\left(\frac{h}{d}\right) \quad (x = 0.4, A_r = 8.5)$$

とよく一致している。

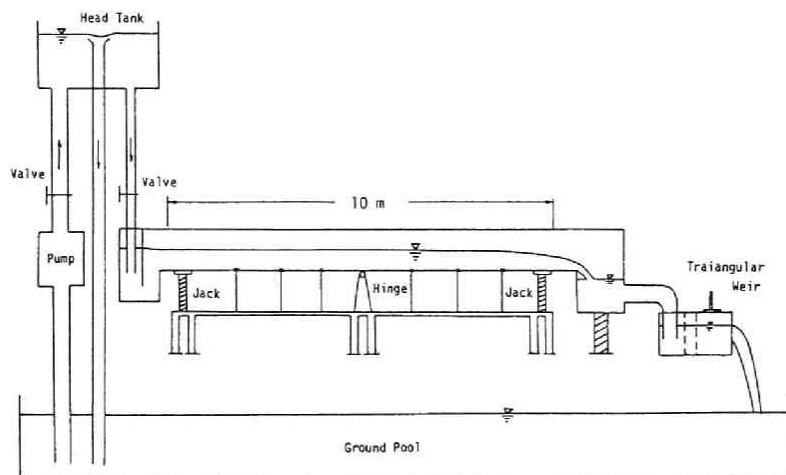


図3.2 実験に用いた水路の概要

表3.1 実験の水理諸量

(a) Smooth Bed

	Width B(cm)	Depth h(cm)	Mean Velocity U(cm/s)	Shear Velocity u_* (cm/s)	Aspect Ratio (B/h)	Slope	Froude Number	Reynolds Number
Run s 1	25.0	1.52	25.90	1.63	16.45	1/500	0.67	3660
Run s 2	25.0	1.97	29.63	1.83	12.69	1/500	0.67	5590
Run s 3	25.0	2.71	36.71	2.09	9.23	1/500	0.71	8150
Run s 4	25.0	2.58	35.44	2.05	9.69	1/500	0.71	8750
Run s 5	80.0	1.54	21.81	1.71	51.95	1/500	0.56	2910
Run s 6	80.0	2.10	26.85	1.98	38.10	1/500	0.59	5010
Run s 7	80.0	3.19	40.26	2.41	25.06	1/500	0.72	11260
Run s 8	25.0	1.39	41.39	2.48	17.99	1/200	1.12	4490
Run s 9	25.0	1.72	48.77	2.72	14.53	1/200	1.19	6510
Run s10	25.0	2.02	53.93	2.91	12.38	1/200	1.21	8570
Run s11	25.0	2.32	62.94	3.10	10.78	1/200	1.32	11430
Run s12	25.0	2.49	64.23	3.19	10.04	1/200	1.30	12580
Run s13	25.0	2.67	64.50	3.28	9.36	1/200	1.26	13360

(b) Rough Bed

	Width B(cm)	Depth h(cm)	Mean Velocity U(cm/s)	Shear Velocity u_* (cm/s)	Aspect Ratio (B/h)	Slope	Froude Number	Reynolds Number	Diameter of Glass Beads(mm)	Relative Roughness Height (d/h)
Run r1	25.0	1.93	24.73	1.81	12.95	1/500	0.54	3800	1.0	0.052
Run r2	25.0	2.16	26.18	1.90	11.57	1/500	0.54	4500	1.0	0.046
Run r3	25.0	1.44	17.44	1.59	17.36	1/500	0.40	2010	2.0	0.139
Run r4	25.0	1.62	19.30	1.68	15.43	1/500	0.42	2470	2.0	0.123
Run r5	25.0	1.86	21.04	1.78	13.44	1/500	0.44	3120	2.0	0.108
Run r6	25.0	2.05	22.91	1.86	12.20	1/500	0.46	3750	2.0	0.098

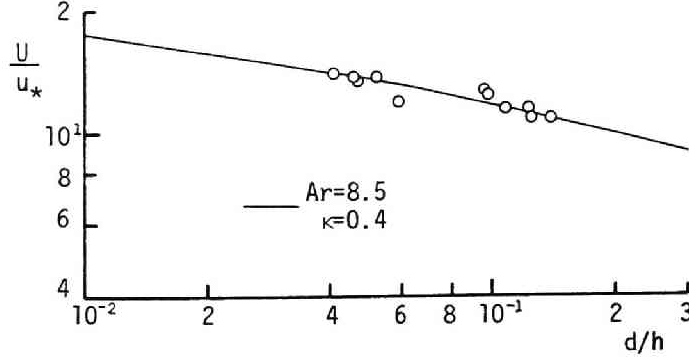


図3.3 粗面上の抵抗則

(2) 濃度分布の伝播特性

まず、三次元的な濃度分布の伝播について図3.4に示した。アスペクト比 $B/h = 9.23$ の場合であり、点源近くでは三次元的な濃度分布形を示すものの、トレーサの流下とともに濃度は水深方向に一様となる。

このように、水深方向に濃度が一様となり、濃度の平面的な分布だけを考えればよいときには、乱流拡散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} + W \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{u'c'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{v'c'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\overline{w'c'}) \quad (3.17)$$

を平面流れのコントロール・ボリューム¹¹⁾で積分した次式を用いることができる。

$$\frac{\partial(Ch)}{\partial t} + \frac{\partial(Ch\overline{U})}{\partial x} + \frac{\partial(Ch\overline{W})}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(hD_x \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(hD_z \frac{\partial C}{\partial z}) \quad (3.18)$$

用いている座標系を図3.5に示す。また、 x, y, z ; 各々流れ方向、水路床に垂直上方、水路幅方向の座標、 h : 水深、 $\overline{U}, \overline{W}$; 各々 U, W の水深平均された流速、 $\overline{D_x}, \overline{D_z}$; 次式で定義される乱流拡散係数を表す。

$$\frac{1}{h} \int_0^h -\overline{u'c'} dy = \overline{D_x} \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{1}{h} \int_0^h -\overline{w'c'} dy = \overline{D_z} \frac{\partial C}{\partial z}$$

以後、 $\overline{D_x}, \overline{D_z}, \overline{U}, \overline{W}$ の $-$ をとる。

等流状態では h を等流水深、 U を断面平均流速、 $W = 0$ とおくことができる。そのとき、(3.18) 式の連続源の解として

$$C(x, z) = \frac{m}{2\pi\sqrt{D_x D_z}} \exp\left(-\frac{Ux}{2D_x}\right) K_0\left[\frac{U}{2D_x} \sqrt{x^2 + \frac{D_x}{D_z} z^2}\right] \quad (3.19)$$

を用いることができる。ここに、 m : 連続源の単位時間当りの放出量、 K_0 : 0 次の変形 Bessel 関数。

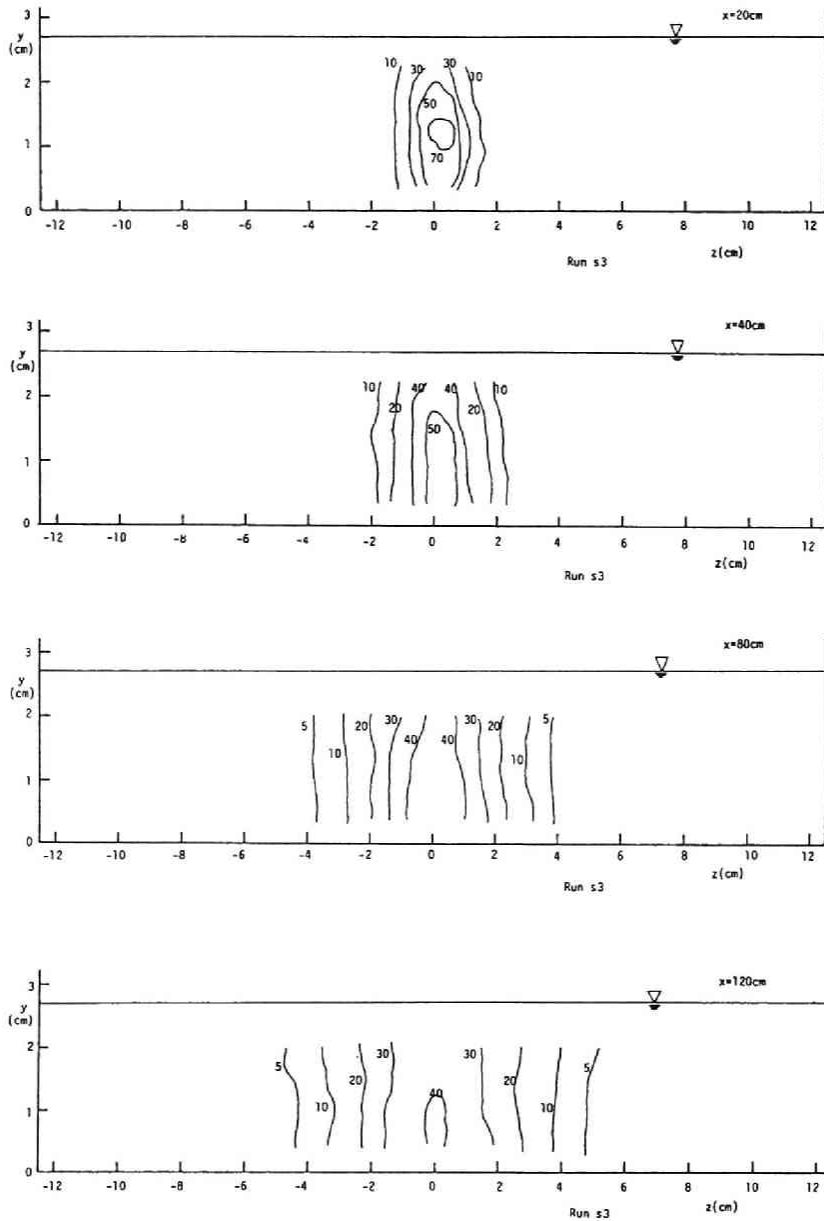


図3.4 濃度分布の伝播特性

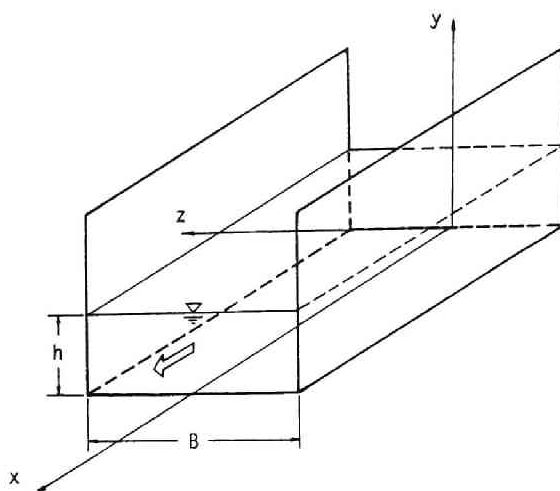


図3.5 水路と座標系

(3.19) 式の $C_p(x) = C(x, 0)$ を, D_z/D_x をパラメータとして無次元座標 xU/D_z に対して示したのが図3.6であり, 図中には Gauss 分布

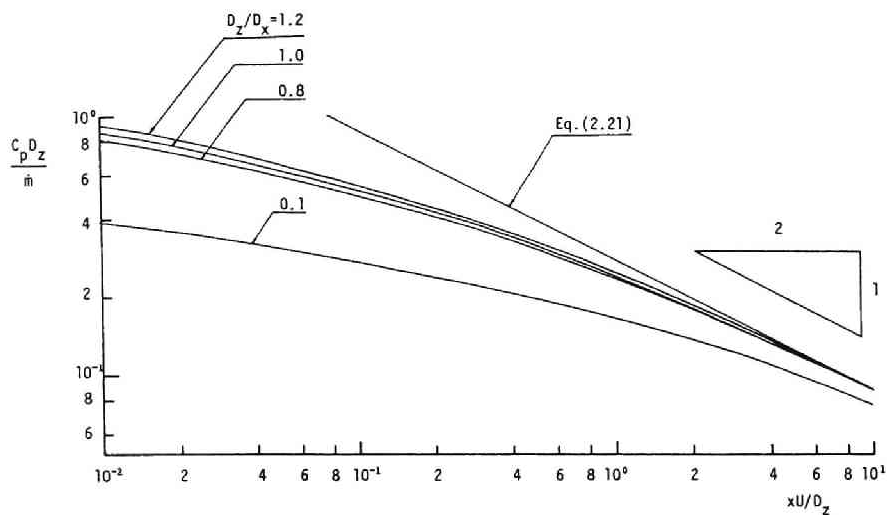


図3.6 ピーク濃度と無次元流下距離の関係

$$C(x, z) = \frac{\dot{m}}{2\sqrt{\pi UD_z x}} \exp\left(-\frac{Uz^2}{4D_z x}\right) \quad (3.20)$$

のピーク濃度

$$C_p(x) = \frac{\dot{m}}{2\sqrt{\pi x U D_z}} \quad (3.21)$$

も示してある。この図より、 $D_z \doteq D_x$ の場合には、 $xU/D_z > 10$ となると x 方向の乱流拡散項が無視され、(3.19) 式は (3.20) 式で近似されることがわかる。このとき、分散

$$\sigma_z^2 = \int_{-B/2}^{B/2} C z^2 dz / \int_{-B/2}^{B/2} C dz \quad (B: \text{水路幅})$$

は

$$\sigma_z^2 = 2 \frac{D_z}{U} x \quad (3.22)$$

となり、(3.16) 式と一致する。もちろん、以上の結果は濃度分布が水路側壁の影響をうけない領域に限られている。

図3.7に、濃度が水深方向に一樣となっている領域の水路幅方向の濃度分布の一例を示した。図中の実線は (3.20) 式であり、実験値は Gauss 分布で十分近似できる。また、規格化ピーク濃度 $F_p = C_p / \int_{-B/2}^{B/2} C dz$ を無次元化した $F_p D_z / U$ を、無次元化距離 xU/D_z に対して示したのが図3.8である。これより、実験値はトレーサの流下とともに (3.21) 式に漸近していくのがわかる。次に、分散 σ_z^2 を無次元化した $\sigma_z^2 U^2 / D_z^2$ を、無次元化距離 xU/D_z に対して示したのが図3.9である。この図から、トレーサの流下とともに実験値は (3.22) 式に漸近していることがわかる。ここで、 σ_z^2 の推定には、ピーク濃度 C_p の $1/e$ 倍となる濃度をもつ z 座標を z_{0-} 、 z_{0+} として、Gauss 分布に対して成立する

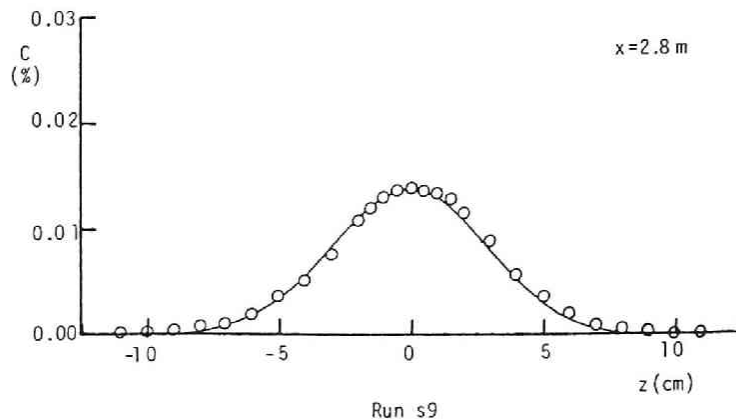
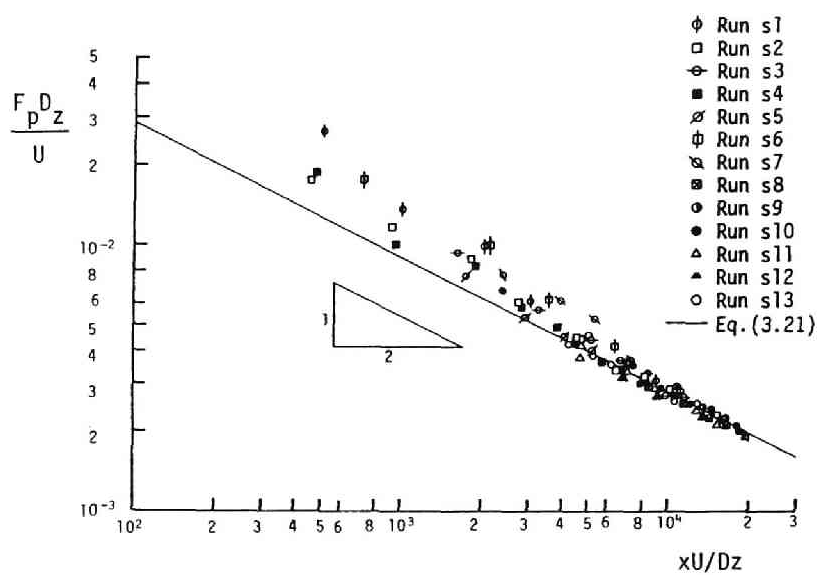
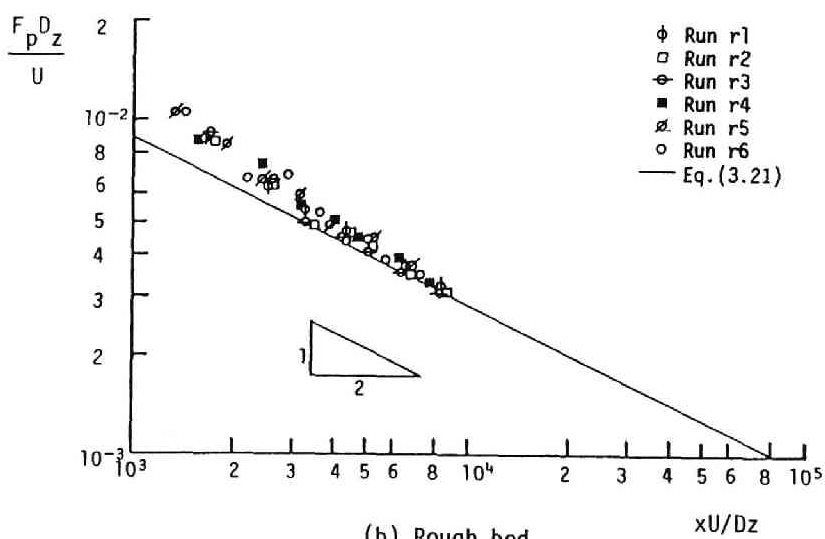


図3.7 濃度の水路幅方向分布



(a) Smooth bed



(b) Rough bed

図3.8 ピーク濃度の減衰過程

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{|z_{0-}| + |z_{0+}|}{2} \right)^2 / 2$$

を用いて求めた。

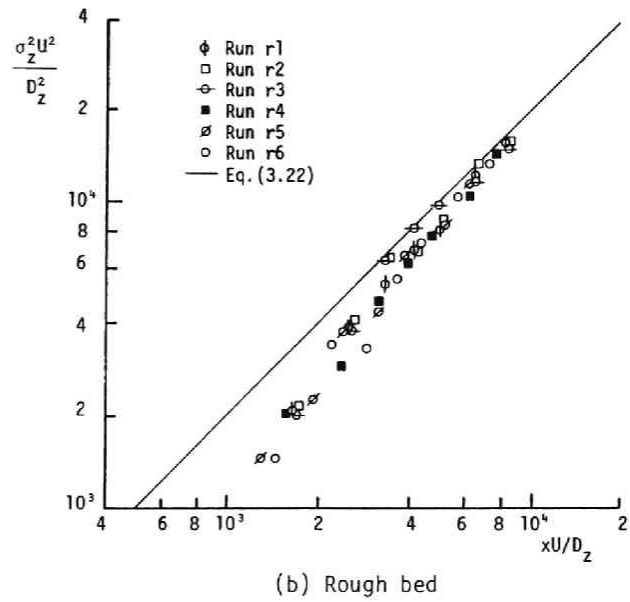
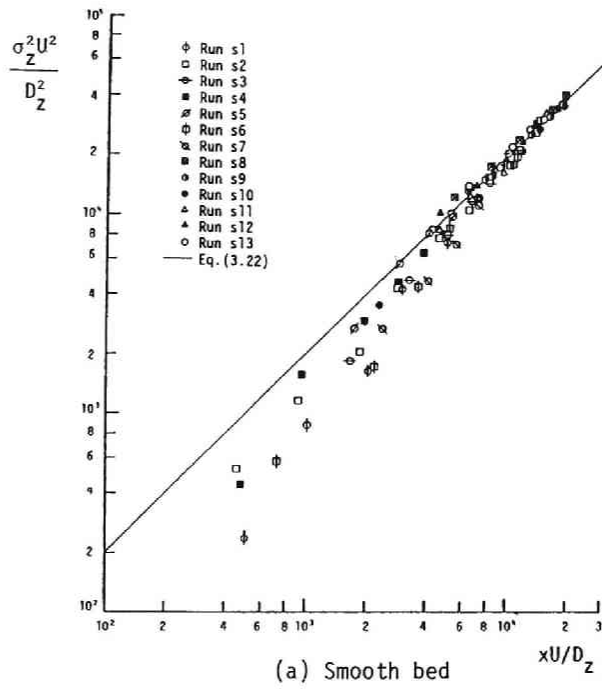


図3.9 統計的分散の伝播過程

(3) 乱流拡散係数と水理量の関係

(2)で求めた σ_z^2 を用いて、(3.22) 式の成立する領域で

$$D_z = \frac{U}{2} \frac{d\sigma_z^2}{dx} \quad (3.23)$$

により D_z を求めた。 D_z を hu_* で無次元化した D_z/hu_* を表3.2に示した。

表3.2 D_z/hu_* の値

(a) Smooth Bed

Run No.	Run s1	Run s2	Run s3	Run s4	Run s5	Run s6	Run s7
D_z/hu_*	0.205	0.179	0.155	0.142	0.278	0.179	0.164
Run.No.	Run s8	Run s9	Run s10	Run s11	Run s12	Run s13	
D_z/hu_*	0.170	0.156	0.157	0.155	0.140	0.136	

(b) Rough Bed

Run No.	Run r1	Run r2	Run r3	Run r4	Run r5	Run r6
D_z/hu_*	0.168	0.148	0.180	0.178	0.195	0.162

D_z/hu_* と水理量の関係については、Okoye⁸⁾により B/h との関係が指摘されている。しかし、その後の研究結果を Lau・Krishnappan が表示した資料と、著者等の実験結果を示した図3.10をみると、 D_z/hu_* と B/h との間には定性的な関係を見い出すことはできない。ただし、示した資料は $B/h > 9$ のものだけである。

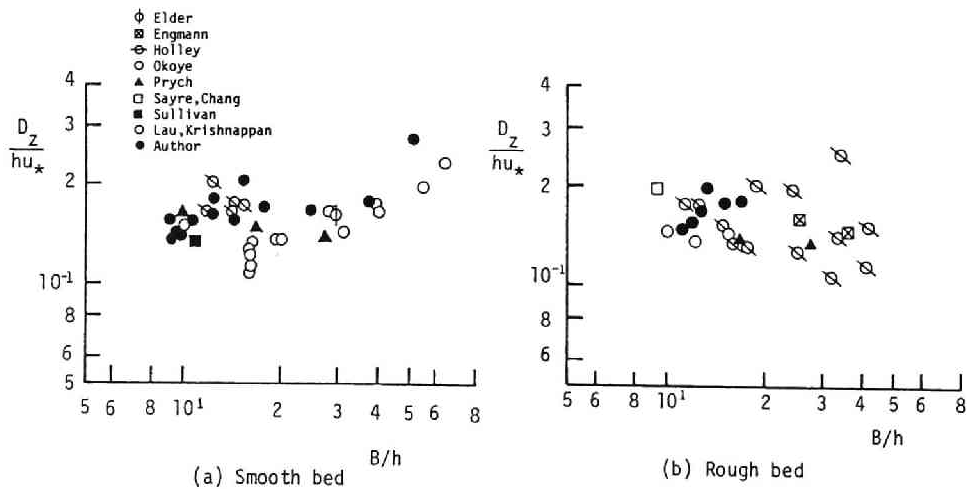


図3.10 D_z/hu_* と形状比 (B/h) の関係

本研究では、 B/h が10程度以上では D_z/hu_* は B/h に関係しないと考え、 D_z/hu_* と U/u_* の関係について考察する。まず、本実験で得られた D_z/hu_* と U/u_* の関係を示したのが図3.11であり、これより滑面と粗面の特性の違いが明確にわかる。すなわち、 D_z/hu_* は滑面では U/u_* のほぼ-2乗で減少している。粗面でも0.15~0.20の範囲で U/u_* とともに減少している。これに対して従来の実験結果を Lau・Krishnappan¹²⁾ がまとめたものを示したのが図3.12である。左は研究者の区別を示し、右は滑面・粗面の区別を示した。滑面では本実験結果と同様に、 D_z/hu_* が U/u_* のほぼ-2乗で減少している。粗面でも U/u_* とともに減少する傾向を示すが、全体として0.1~0.2の間の値となっている。これは研究者によって用いられた粗度が多種類にわたるためと考えられる。

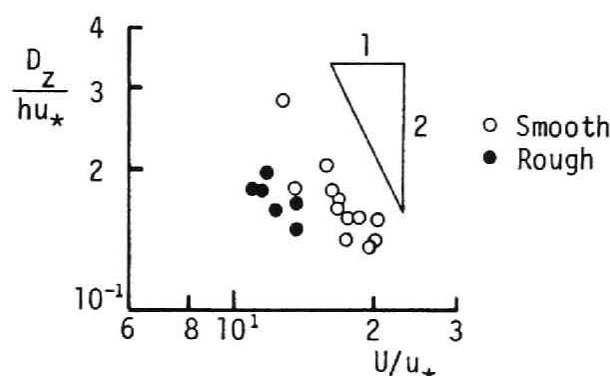


図3.11 本研究で得られた D_z/hu_* と U/u_* の関係 ($B/h > 9$)

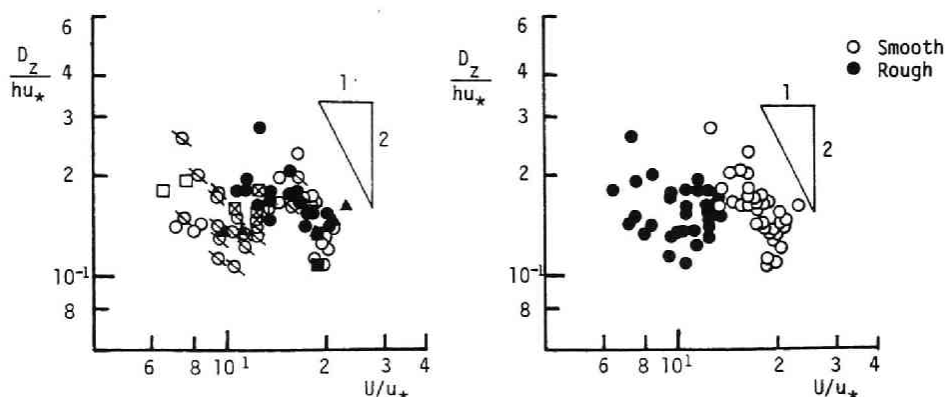


図3.12 D_z/hu_* と U/u_* の関係 ($B/h > 9$)

U/u_* は、滑面では Reynolds 数、粗面では相対粗度と一義的に関係づけられる。滑面での D_z/hu_* と Reynolds 数の関係を示したのが図3.13であり、 D_z/hu_* は Reynolds 数のほぼ-1/3乗で

減少している。同様に、粗面について、 D_z/hu_* と d/h の関係を示したのが図3.14である。 d/h を求められるのが著者の資料のみであったため明確なことは言えないが、 D_z/hu_* は d/h が増加するとともに線形に増加しているように思われる。

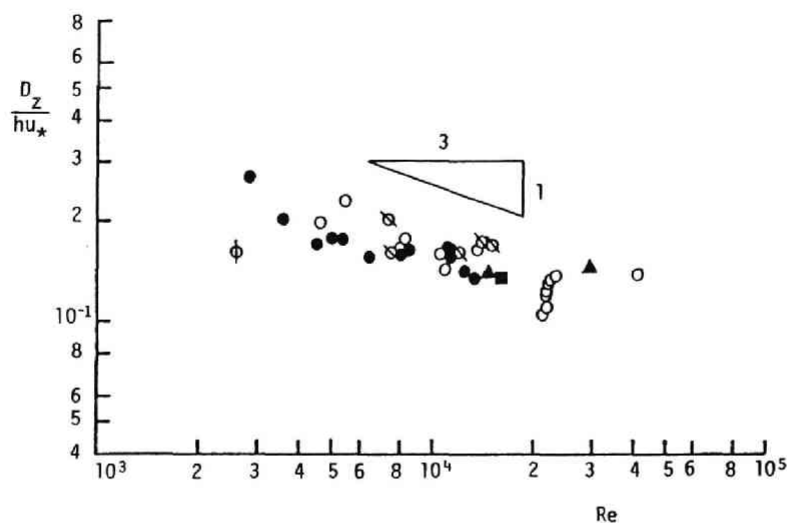


図3.13 D_z/hu_* と Reynolds の関係 ($B/h > 9$)

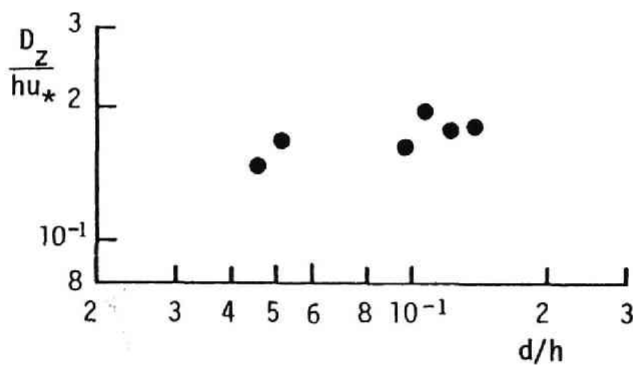


図3.14 D_z/hu_* と 相対粗度の関係

3.3 結語

本章では乱流拡散方程式の時間、空間に関するモーメント特性についてまとめるとともに、開水路流れの中に点源として連続的に放出された物質の水路幅方向乱流拡散係数について考察した。その結

果として次のことが言える。

- ① 点源からの流下距離の増加とともに、濃度分布は水深方向に一様となり、その領域では濃度分布の特性量（濃度分布形の分散 σ_z^2 、規格化ピーク濃度）は（3.20）式に従うようになる。
- ② 水路幅方向の乱流拡散係数 D_z/hu_* と U/u_* との関係を示した図3.11, 3.12をみると、滑面では D_z/hu_* は U/u_* のほぼ -2 乗で減少し、粗面でも U/u_* とともに減少する傾向を示し、全体として $0.1 \sim 0.2$ の範囲でばらついている。また、粗・滑遷移領域の存在も確認できる。
- ③ 滑面の資料について、 D_z/hu_* と Reynolds 数の関係を図3.13に示した。 D_z/hu_* は Reynolds 数のほぼ $-1/3$ 乗で減少している。粗面では、著者等の実験結果を用いて D_z/hu_* と相対粗度 d/h の関係を示した。 D_z/hu_* は d/h の増加とともに線形に増加している。

参考文献

- 1) Aris, R. : On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube, Proc. Royal Soc. London, Vol. 235, Ser. A, pp. 67-77, 1956.
- 2) Tsai, Y. T. and Holley, E. R. : Temporal moment for longitudinal dispersion, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol. 104, HY12, pp. 1617-1634, 1978.
- 3) 細田 尚：開水路流れにおける移流分散機構に関する研究，京都大学修士論文，1980.
- 4) 細田 尚，余越正一郎：時間計測による乱流拡散現象の解析，土木学会中国四国支部 第39回研究発表会講演概要集，1987.
- 5) Glover, R. E. : Dispersion of dissolved or suspended materials in flowing streams, Geological Survey Professional Paper 433-B, 1964.
- 6) 道上正規，村本嘉雄，伊丹正紀：縦分散における移流域の特性，第22回水理講演会論文集，pp. 133-139, 1978.
- 7) 岩佐義朗，細田 尚，野口好夫：移流分散機構の三次元的考察，土木学会関西支部年次学術講演会講演概要，II-17, 1980.
- 8) Okoye, J. K. : Characteristics of transverse mixing in open channel flows, Report No. KH-R-23, C. I. T., 1970.
- 9) 岩佐義朗，細田 尚，野口好夫：粗・滑面水路における水路幅方向の乱流拡散係数，京都大学防災研究所年報 第25号 B2, pp. 557-572, 1982.
- 10) 今本博健：開水路流れの乱れに関する水理学的研究，京都大学学位論文，1971.
- 11) 岩佐義朗：開水路流れのモデリング法，水工学シリーズ，80-A-3，土木学会水理委員会，1980.
- 12) Lau, Y. L. and Krishnappan, B. G. : Transverse dispersion in rectangular channels, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol. 103, HY10, pp. 1173-1189, 1977.

第4章 濃度変動の拡散機構

第3章では、開水路流れの中に、点源として連続的に放出された物質の平均濃度の伝播特性について、水路幅方向乱流拡散係数と水理量の関係を中心に考察した。本章では、平均濃度の特性が第3章である程度明らかになったので、次に濃度変動場の伝播特性について検討する。

濃度変動場の解析には、Csanady¹⁾が行ったように、濃度変動強さ $\overline{c'^2}$ についての関係式 ($\overline{c'^2}$ 方程式) が用いられる。 $\overline{c'^2}$ 方程式中には、乱れエネルギーについての関係式 (k 方程式) と同様に、未知量である濃度変動強さの散逸率 ϵ_c が現れる。よって、本章では第2編で述べる $k-\epsilon$ モデルに対応した $\overline{c'^2}-\epsilon_c$ 方程式を用いて解析を試みる。その際、 ϵ_c 方程式中の生成項、散逸項の表示について若干の考察を加えた。

密度が空間的に一様な流れの場合では、 $\overline{c'^2}$ 、 ϵ_c は流れの解析に用いられる基礎式中に現れない。一方、密度が空間的に非一様な場合、 $-\overline{c'u'_i}$ 方程式中に $\overline{c'^2}$ を含む項が現れる (第2編 (4.5) 式参照)。このために、 $\overline{c'^2}-\epsilon_c$ 方程式を解く場合もあるが、現在のところ ϵ_c 方程式に関する知識が十分でないため、Launder²⁾が行ったように ϵ_c を何らかの既知量で表わし、 $\overline{c'^2}$ 方程式で打切る場合もある。このような現状を考え、 $\overline{c'^2}-\epsilon_c$ 方程式を密度流に適用する前段階として $\overline{c'^2}-\epsilon_c$ の表示について考察し、拡散実験の結果と比較することにより、その妥当性を検討する。得られた結果は、 ϵ_c 方程式の構成だけでなく、 ϵ 方程式の浮力項、 ϵ_c の簡易的な表示法にも適用される。

4.1 $\overline{c'^2}-\epsilon_c$ 方程式の基本的特性^{3,4)}

(1) $\overline{c'^2}-\epsilon_c$ 方程式の概要

濃度を c とすると、分子拡散方程式は次のように表せる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \quad (4.1)$$

ここに、 t : 時間、 x_i : 空間座標、 u_i : 流速ベクトルの成分、 λ : 分子拡散係数。また、総和の規約を用いている。

c 、 u_i を時間平均値とそれからのずれとして $c = C + c'$ 、 $u_i = U_i + u'_i$ と表せば、乱流拡散方程式は (1.1) 式に示したように、

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (-\overline{u'_i c'}) + \lambda \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} \quad (4.2)$$

となる。(4.1) 式より (4.2) 式を減ずれば、 c' について

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + u'_i \frac{\partial C}{\partial x_i} + U_i \frac{\partial c'}{\partial x_i} + \left(u'_i \frac{\partial c'}{\partial x_i} - \overline{u'_i \frac{\partial c'}{\partial x_i}} \right) = \lambda \frac{\partial^2 c'}{\partial x_i^2} \quad (4.3)$$

が得られる。(4.3) 式の両辺に $2c'$ を乗じ平均操作を行えば、 $\overline{c'^2}$ に対して

$$\frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial t} + U_i \frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial x_i} = -2\overline{u'_i c'} \frac{\partial C}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial x_i} - \overline{u'_i c'^2} \right) - \epsilon_c \quad (4.4)$$

が成り立つ¹⁾。ここに、 ϵ_c は次式で定義される。

$$\epsilon_c = 2\lambda \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_i} \frac{\partial c'}{\partial x_i}} \quad (4.5)$$

(4.3) 式を x_j で微分し、両辺に $4\lambda \frac{\partial c'}{\partial x_j}$ を乗じて平均すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_c}{\partial t} + U_i \frac{\partial \epsilon_c}{\partial x_i} &= -4\lambda \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial c'}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} - 4\lambda \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial C}{\partial x_i}} \\ &\quad - 4\lambda \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial c'}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} - 4\lambda^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 c'}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\overline{u'_i \epsilon_c} + \lambda \frac{\partial \epsilon_c}{\partial x_i} \right) - 4\lambda \overline{u'_i \frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial^2 C}{\partial x_j \partial x_i}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる。

(4.4), (4.6) 式が $\overline{c'^2} - \epsilon_c$ 方程式と呼ばれるものであって、 $k-\epsilon$ 方程式と類似している。(4.4) 式中、右辺第1項が生成項、第2項が拡散項、第3項が散逸項である。同様に、(4.6) 式中、右辺第1, 2項が生成項、第3, 4項が散逸項、第5項が拡散項と考えられる。乱れ Reynolds 数が十分大きい流れを取り扱う標準的な $k-\epsilon$ モデルとの対応を考えると、(4.4) 式中 $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial x_i} \right)$ が無視される。また、(4.6) 式中 $-4\lambda^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 c'}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2}$, $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \epsilon_c}{\partial x_i} \right)$, $-4\lambda \overline{u'_i \frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial^2 C}{\partial x_j \partial x_i}}$ が無視される。

実際に、(4.4), (4.6) 式を用いて解析を行うためには、各項を既知の水理量で表すことが必要となるが、現段階では ϵ_c 方程式の各項の表示は十分に確立していないと思われる。次に、一様乱流場の知見を基に、 ϵ_c 方程式の散逸項の表示について若干の考察を行う。

(2) 一様等方性乱流場での $\overline{c'^2} - \epsilon_c$ 方程式の構成

一様等方性乱流場では、Kármán-Howarth 方程式と同様に濃度変動場の空間相関係数が次式によって規定される⁵⁾。

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{c'^2} R_{c,c}(r, t) - 2\overline{c'^2} \sqrt{u'^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 k_c(r, t)] = 2\lambda \overline{c'^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial R_{c,c}(r, t)}{\partial r} \right] \quad (4.7)$$

ここに、 $R_{c,c}(r, t)$, $k_c(r, t)$ は、各々、濃度の空間相関係数、濃度と流速の三重相関係数であり、次のように定義される。

$$R_{c,c}(r, t) = \frac{\overline{c'_A c'_B}}{c'^2},$$

$$k_c(r, t) = \frac{\overline{c'_B c'_A (u'_r)_A}}{c'^2 \sqrt{u'^2}}$$

上式中、 A, B は相関をとる 2 点を表し、 r はその間の距離である。また、 u'_r は乱れ速度の r 方向成分を示す。

(4.7) 式をスペクトル関数を用いて表すと次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{c,c}(q, t) - 2F_{c,c}(q, t) = -2\lambda q^2 E_{c,c}(q, t) \quad (4.8)$$

ここに、 q は波数ベクトル $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ の大きさであり、 $E_{c,c}$, $F_{c,c}$ は次のように定義される。

$$E_{c,c}(q, t) = \frac{\overline{c'^2}}{2\pi^2} \int_0^\infty r^2 \frac{\sin qr}{qr} R_{c,c}(r, t) dr, \quad (4.9a)$$

$$F_{c,c}(q, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty r^2 \frac{\sin qr}{qr} S_{c,c}(r, t) dr, \quad (4.9b)$$

$$S_{c,c}(r, t) = \overline{c'^2} \sqrt{u'^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 k_c) \quad (4.9c)$$

一様等方性乱流場では、 $F_{c,c}(q, t)$ は次のように級数展開できる⁵⁾。

$$F_{c,c}(q, t) = -\frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{q^2}{3!} \int_0^\infty r^4 S_{c,c}(r, t) dr - \frac{q^4}{5!} \int_0^\infty r^6 S_{c,c}(r, t) dr + \dots \right] \quad (4.10)$$

すなわち、 $q \rightarrow 0$ のとき $F_{c,c}(q, t) \rightarrow 0$ となり、(4.8) 式より次式が導ける。

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} E_{c,c}(q, t) = 0 \quad (4.11)$$

$E_{c,c}(q, t)$ も q^2 のべき級数で表示され、(4.11) 式は $E_{c,c}(q, t)$ が $q \rightarrow 0$ のとき $E_{c,c} \rightarrow q^{2m}$ ($m = 1, 2, \dots$) と表されることを示している。(4.11) 式は、スペクトル関数の低波数領域の時間的不変性を示し、(4.9a) 式を q に関して微分した後 $q \rightarrow 0$ の極限をとることにより、積分量

$$A_\sigma \equiv \overline{c'^2} \int_0^\infty r^\sigma R_{c,c}(r, t) dr \quad (4.12)$$

の時間的不変性と結びつけられる。ここに、 δ は $\bar{E}_{c,c}$ の q に関する最小のべき指数である。

一方、次元考察より、 $E_{\gamma,\gamma}(q, t)$ には

$$E_{\gamma,\gamma}(q, t) \propto \epsilon_c(t) \epsilon(t)^{-1/3} q^{-5/3} \quad (4.13)$$

と表せる領域が存在する^{5,6)}。また、乱れ Reynolds 数が十分大きい場合には、 $E_{c,c}(q, t)$ が⁸⁾、低波数領域も含めて、長さのスケール

$$L \propto \sqrt{\left(\frac{c'^2}{\epsilon_c}\right)^3 \epsilon} \quad (4.14)$$

を用いた無次元化波数 $q' = q \cdot L$ ($R_{c,c}(r, t)$ の場合は $r' = r \cdot L$) で普遍関数表示される⁹⁾。これらのことと (4.12) 式より

$$\overline{c'^2 L^{\delta+1}} = \text{一定} \quad (4.15)$$

が得られ、上式を時間に関して微分することにより、

$$\frac{d\epsilon_c}{dt} = -\frac{(\delta+1)+\frac{2}{3}}{\delta+1} \frac{\epsilon_c^2}{c'^2} - \frac{c_{\epsilon_2}}{3} \frac{\epsilon_c \epsilon}{k} \quad (4.16)$$

が導かれる^{3,4)}。ここに、 k : 乱れエネルギー ($k = \overline{3u'^2}/2$)、 c_{ϵ_2} : $k-\epsilon$ 定数。また、上式の誘導の過程において、第2編第1章で述べる一様乱流場での $k-\epsilon$ モデル

$$\frac{dk}{dt} = -\epsilon \quad (4.17)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (4.18)$$

を用いている。(4.16) 式は Newman・Launder・Lumley⁷⁾ の表示と同様であるが⁸⁾、 $k-\epsilon$ 定数 c_{ϵ_2} が定数の中に含まれているところに特徴がある。

(4.16) 式中、右辺第1項の定数 $[(\delta+1)+2/3]/(\delta+1)$ は δ に関する単調減少関数で、 δ が 0 から無限大まで変化する間に 5/3 から 1 まで変化する。

(3) ϵ_c —方程式の生成項の表示に関する考察

次に、(4.6) 式右辺第1, 2項、すなわち、 ϵ_c 方程式の生成項

$$-4\lambda \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial c'}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} - 4\lambda \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial C}{\partial x_i}}$$

の表示について考察しよう。

右辺第1項については、 ϵ 方程式の生成項の表示法と同様に

$$-4\lambda \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial c'}{\partial x_i}} = -\frac{2}{3} \epsilon_c \cdot \delta_{ij}$$

とおく。($i = j$ のとき ϵ_c の定義式 (4.5) となる。) これに $\partial U_i / \partial x_j$ を乗ずれば連続式より 0 となり、結局、(4.6) 式右辺第1項は無視される。

右辺第2項は次のように考えられる。空間の点 \mathbf{x} で濃度変動に関する (4.3) 式を考える。これに \mathbf{x} より \mathbf{r} だけ離れた $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ の $\partial c' / \partial x_j$ を乗じて時間平均をとる。そのとき、

$$-\lambda \overline{\frac{\partial c'(\mathbf{x}^{(1)}, t)}{\partial x_j^{(1)}} \frac{\partial u_i'(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}} = -\lambda \overline{\frac{\partial^2 u_i' c'(\mathbf{x}, t, \mathbf{r})}{\partial x_j \partial r_j}} + \lambda \overline{\frac{\partial^2 u_i c'(\mathbf{x}, t, \mathbf{r})}{\partial r_j \partial r_j}} \quad (4.19)$$

となるが、上式右辺第1項は第2項に比べて十分小さいとする。このとき、 $\overline{u_i c'}$ は \mathbf{r} と t の関数と考えられ、次式のように Fourier 積分で表示する。

$$\overline{u_i c'}(\mathbf{r}, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{uc}(\mathbf{q}, t) \exp(i\mathbf{q}_i r_i) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 \quad (4.20)$$

これを (4.19) に代入し、 $r_j \rightarrow 0$ とすれば、

$$-\lambda \overline{\frac{\partial c'(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}} = -\lambda \int \int \int_{-\infty}^{\infty} q^2 \mathbf{E}_{uc}(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 \quad (4.21)$$

となる。

Hinze⁵⁾ が homogeneous shear flow turbulence の定式化に用いているように、 $\mathbf{E}_{uc}(\mathbf{q}, t)$ の半径 q の球面での平均を次式で定義する。

$$[\mathbf{E}_{uc}(\mathbf{q}, t)]_{av} = \frac{1}{4\pi q^2} \int \mathbf{E}_{uc}(\mathbf{q}, t) dA(q) \quad (4.22)$$

$dA(q)$ は半径 q の球面の面積要素。

$4\pi q^2 [\mathbf{E}_{uc}(\mathbf{q}, t)]_{av} = E_{uc}(q, t)$ とおけば (4.21) 式は次式となる。

$$-\lambda \overline{\frac{\partial c'(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}} = -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} q^2 E_{uc}(q, t) dq \quad (4.23)$$

もちろん、 $E_{uc}(q, t)$ は次式を満たす。

$$\overline{u'_i c'} = \int_{-\infty}^{\infty} E_{uc}(q, t) dq \quad (4.24)$$

次に、 $E_{uc}(q, t)$ の関数形が必要となるが、乱流モデルの構成を考えるとよく用いられる関数形の相似性を仮定する。すなわち、(2)でも同様の手法を用いたが、ある長さのスケール L で無次元化された波数 $q' = q \cdot L$ で E_{uc} の無次元量 $E_{uc}' = E_{uc} / \overline{u'_i c'} \cdot L$ が普遍関数表示されるとする。ここで普遍関数表示されると述べたが、たとえばエネルギー・スペクトルを考えると、第2編第1章で述べているように粘性領域の存在のためエネルギー・スペクトル関数に乱れ Reynolds 数 Re_T がパラメータとして入る。普遍関数表示というのはエネルギー・スペクトルの場合、 Re_T 無限大での表示を意味している。 E_{uc} についても同様のことが考えられるが、エネルギー・スペクトルの場合の Re_T に対応するパラメータがどのようなものかは明確でない。

エネルギー・スペクトルや濃度変動のスペクトルの粘性領域の長さのスケールは各々 $(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ 、 $(\lambda^3/\epsilon)^{1/4}$ である。一方、慣性領域とそれより低波数の領域のエネルギー・スペクトル、濃度変動のスペクトルを普遍的に表示するための長さのスケールは各々 $k^{3/2}/\epsilon$ 、 $(\overline{c'^2}/\epsilon_c)^{3/2}\epsilon^{1/2}$ である。この二つのスケールを用いた場合、(4.23) 式は各々次のようになる。

$$L = k^{3/2}/\epsilon$$

$$-\lambda \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = -\overline{u'_i c'} \frac{\epsilon}{k} \cdot \frac{\lambda \epsilon}{k^2} \int_0^{\infty} q'^2 E_{uc}'\left(q', \frac{k^2}{\lambda \epsilon}\right) dq' \quad (4.25a)$$

$$L = \left(\frac{\overline{c'^2}}{\epsilon_c}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2}$$

$$-\lambda \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = -\overline{u'_i c'} \frac{\epsilon_c}{\overline{c'^2}} \cdot \frac{\lambda \epsilon}{k^2} \cdot \left(\frac{k}{\epsilon} \cdot \frac{\epsilon_c}{\overline{c'^2}}\right)^2 \cdot \int_0^{\infty} q'^2 E_{uc}'\left(q', \frac{k^2}{\lambda \epsilon} \cdot \left(\frac{\epsilon}{k} \cdot \frac{\overline{c'^2}}{\epsilon_c}\right)^2\right) dq' \quad (4.25b)$$

(4.25a, b) 式で E_{uc}' の関数の中にパラメータ $\frac{k^2}{\lambda \epsilon}$ 、 $\frac{k^2}{\lambda \epsilon} \left(\frac{\epsilon}{k} \cdot \frac{\overline{c'^2}}{\epsilon_c}\right)^2$ が現れるのは、粘性領域の無次元波数 $q/(\lambda^3/\epsilon)^{1/4}$ を $(q/L) \cdot [L/(\lambda^3/\epsilon)^{1/4}] = q' \cdot [L/(\lambda^3/\epsilon)^{1/4}]$ と書きかえたためであり、エネルギー・スペクトルの場合の Re_T に対応する。

$k^2/\lambda \epsilon$ が無限大になるとき (4.25a, b) 式の積分

$$\frac{\lambda \epsilon}{k^2} \int_0^{\infty} q'^2 E_{uc}'\left(q', \frac{k^2}{\lambda \epsilon}\right) dq', \quad \frac{\lambda \epsilon}{k^2} \left(\frac{k}{\epsilon} \cdot \frac{\epsilon_c}{\overline{c'^2}}\right)^2 \int_0^{\infty} q'^2 E_{uc}'\left(q', \frac{k^2}{\lambda \epsilon} \cdot \left(\frac{\epsilon}{k} \cdot \frac{\overline{c'^2}}{\epsilon_c}\right)^2\right) dq' \quad (4.26)$$

が定数となると考えて、 ϵ_c - 方程式の生成項が次のように表示される。

$$-4\lambda \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \frac{\partial C}{\partial x_i} = c_{\epsilon c} (-\overline{u'_i c'}) \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial C}{\partial x_i}, \quad c_{\epsilon c} (-\overline{u'_i c'}) \frac{\epsilon_c}{\overline{c'^2}} \frac{\partial C}{\partial x_i} \quad (4.27)$$

(4.26) 式と同様の積分は ϵ の定義にも現れる。 ϵ はエネルギー・スペクトル $E(q)$ を用いれば

$$\epsilon = 2\nu \int_0^\infty q^2 E(q) dq \quad (4.28)$$

と書けるが⁸、波数を $L = k^{3/2}/\epsilon$ で無次元化すれば

$$\epsilon = 2\nu \frac{\epsilon^2}{k^2} \int_0^\infty q'^2 E'\left(q', \frac{k^2}{\nu\epsilon}\right) dq' \quad (E'(q) = E(q)/k \cdot L)$$

となり、書き直せば

$$1 = 2 \frac{\nu\epsilon}{k^2} \int_0^\infty q'^2 E'\left(q', \frac{k^2}{\nu\epsilon}\right) dq' \quad (4.29)$$

が得られる。この場合、(4.29) 式の積分は $k^2/\nu\epsilon$ にかかわらず定数となる。

次に、 ϵ_c 方程式の生成項の表示に (4.27) 式の二通りを考え、 c_{ϵ_c} をパラメータとした解析を行い実験結果と比較しよう。

4.2 開水路流れにおける濃度変動場の流下過程

(1) 解析に用いられる基礎式系

開水路の中を等流状態で流れている流れの中に、連続的に点源として放出された物質の濃度変動の伝播について、4.1で述べた $\overline{c'^2} - \epsilon_c$ 方程式を用いて検討する。

時間平均濃度は、前章で検討したように、放出点からの流下距離の増加とともに水深方向に一樣となる。この領域では、 $\overline{c'^2}$ に関して次節で示されるように、 $\overline{c'^2}$ 、 ϵ_c も水路幅方向の変化に比べて水深方向の変化は十分小さいと考えられる。よって、 $\overline{c'^2} - \epsilon_c$ 方程式についても $\overline{c'^2}$ 、 ϵ_c が水深方向に一樣として平面流れの解析法を適用すれば次のような基礎式が得られる。用いている座標系を図4.1に示した。

$$\frac{\partial Ch}{\partial t} + \frac{\partial(CUh)}{\partial x} + \frac{\partial(CWh)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(h \cdot \overline{u'c'}) + \frac{\partial}{\partial z}(h \cdot \overline{w'c'}) \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{c'^2} h}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{c'^2} Uh)}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{c'^2} Wh)}{\partial z} &= 2h \left(-\overline{u'c'} \frac{\partial C}{\partial x} - \overline{w'c'} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x}(h \cdot \overline{u'c'^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(h \cdot \overline{w'c'^2}) - h\epsilon_c \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_c h}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon_c Uh)}{\partial x} + \frac{\partial(\epsilon_c Wh)}{\partial z} &= h \cdot (\text{生成項}) + \frac{\partial}{\partial x}(h \cdot \overline{u'\epsilon_c'}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}(h \cdot \overline{w'\epsilon_c'}) + h \cdot (\text{散逸項}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

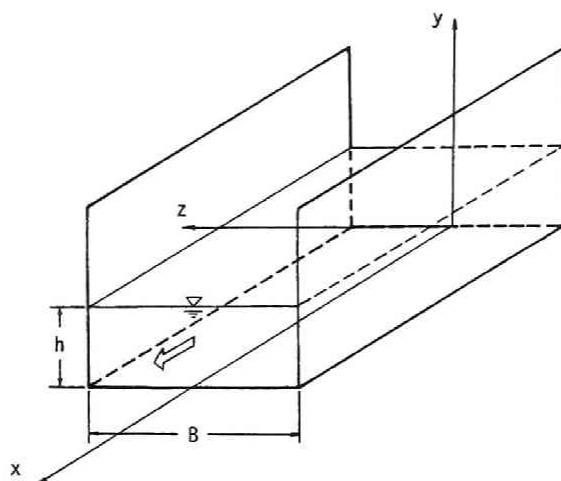


図4.1 座標系

ここに、 h : 水深、 U 、 W : 水深平均流速ベクトルの x 、 z 方向成分、 C : 水深平均濃度である。等流状態を考えているため、 $h = h_0$ (等流水深)、 $W = 0$ となる。また、連続的に点源として放出されるばあい、第3章で述べたように、点源からの距離が増加するとともに x 方向の拡散項は無視される。

(4.32) 式中、生成項の表示として (4.27) 式の二つを考える。ただし、点源からの距離の増加とともに水路幅方向の濃度こう配が卓越するため、(4.32) 式の生成項の表示として最終的に次式を用いる。

$$(\text{生成項}) = c_{\epsilon c}(-\overline{w'c'})\frac{\epsilon_c}{c'^2}\frac{\partial C}{\partial z}, \quad c_{\epsilon c}(-\overline{w'c'})\frac{\epsilon}{k}\frac{\partial C}{\partial z}$$

(4.32) 式中、散逸項の表示として、4.1(2)での考察より (4.16) 式を用いる。

以上のことから、解析に用いる基礎式系は次のようになる。

$$U\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial C}{\partial z}\right) \quad (4.33)$$

$$U\frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial x} = 2D_z\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial z}\right) - \epsilon_c \quad (4.34)$$

$$U\frac{\partial \epsilon_c}{\partial x} = \left[c_{\epsilon c}\frac{\epsilon_c}{c'^2}D_z\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)^2, \quad c_{\epsilon c}\frac{\epsilon}{k}D_z\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial \epsilon_c}{\partial z}\right) - \frac{(\delta+1)+(2/3)}{\delta+1}\frac{\epsilon_c^2}{c'^2} - \frac{c_{\epsilon 2}}{3}\frac{\epsilon_c\epsilon}{k} \quad (4.35)$$

ここに、 $-\overline{w'c'}$ 、 $-\overline{w'c'^2}$ 、 $-\overline{w'\epsilon_c}$ は水路幅方向の乱流拡散係数 D_z を用いて

$$-\overline{w'c'} = D_z \frac{\partial C}{\partial z}, \quad -\overline{w'c'^2} = D_z \frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial z}, \quad -\overline{w'\epsilon_c'} = D_z \frac{\partial \epsilon_c}{\partial z} \quad (4.36)$$

と表している。

(2) 実験の概要

実験は、第3章と同様に京都大学工学部土木総合館地階水理実験室に設置された全長 10m、幅 25cm の長方形断面水路を用いて行われた。水路と座標系の対応は図4.1と同じである。水路上流端より 3m の地点の $z = 0\text{cm}$ 、 $y = h_0/2\text{cm}$ の位置に内径 5mm の点源を設置し、メチル・アルコールで比重 1 に調整された重量百分率 3 % の食塩水を連続的に放出した。放出流量をフロー・メータで計測し、放出口での食塩水の流速がほぼ断面平均流速になるように注意した。

放出口下流での濃度計測も第3章と同様であり、出力をデータ・レコーダ (TEAC R81) に記録し、AD 変換器 (TEAC DR2000A) によってサンプリング間隔 2.5ms で AD 変換し、統計処理を行った。

実験の水理諸量を表4.1に示す。

実験により得られた等濃度線図、等濃度変動線図を図4.2、4.3に示した。等濃度線図はほぼ $z = 0\text{cm}$ に最大値をもち、濃度変動強さも $x = 20\text{cm}$ では $z = 0\text{cm}$ で最大となっているが、 $x = 80\text{cm}$ では z の増加とともに $\overline{c'^2}$ は一度極大値をとってから減少している。

表4.1 実験の水理諸量

	Width B (cm)	Depth h (cm)	Mean Velocity U (cm/s)	Shear Velocity u_* (cm/s)	Aspect Ratio B/h	Slope	Froude Number	Reynolds Number
Exp.	25.0	2.09	31.06	1.87	11.96	1/500	0.69	6130

$z = 0\text{cm}$ の濃度変動強さの流下方向の減衰を示したのが図4.4である。さらに、濃度変動のスペクトルを図4.5、4.6に示した。(スペクトルはFFT法で求めた。) 図4.5は $x = 80\text{cm}$ 、 $y = 1\text{cm}$ において z 方向に測点を移動させたばあいであり、図4.6は $y = 1\text{cm}$ 、 $z = 0\text{cm}$ で流れ方向に測点を移動させたばあいである。いずれも $-5/3$ 乗で減少する領域がみられる。

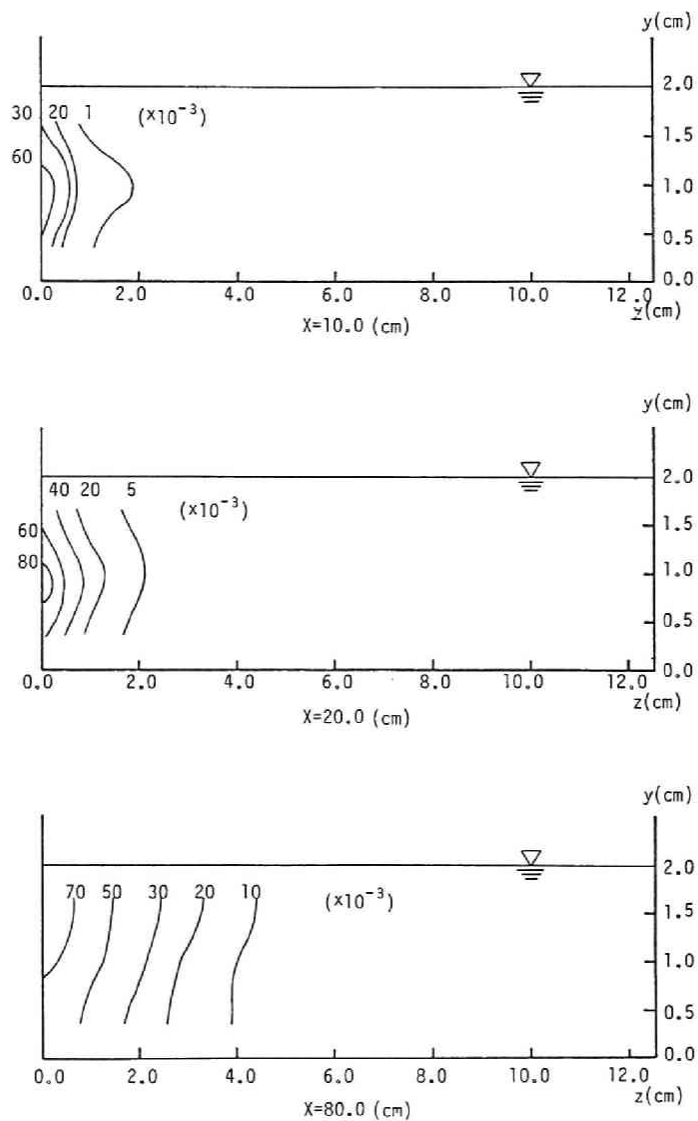


図4.2 等濃度線図

(3) 実験結果と解析結果の比較

(4.33)～(4.35) 式を用いて数値解析を行い、実験結果と比較する。その前に基礎式を無次元化し、無次元パラメータを導入する。 $x = 0\text{cm}$ の境界条件 $C = C_0$, $\overline{c'^2} = \overline{c'^2}_0$, $\epsilon_c = \epsilon_{c0}$ を用いて次式で定義される無次元変数を導入する。

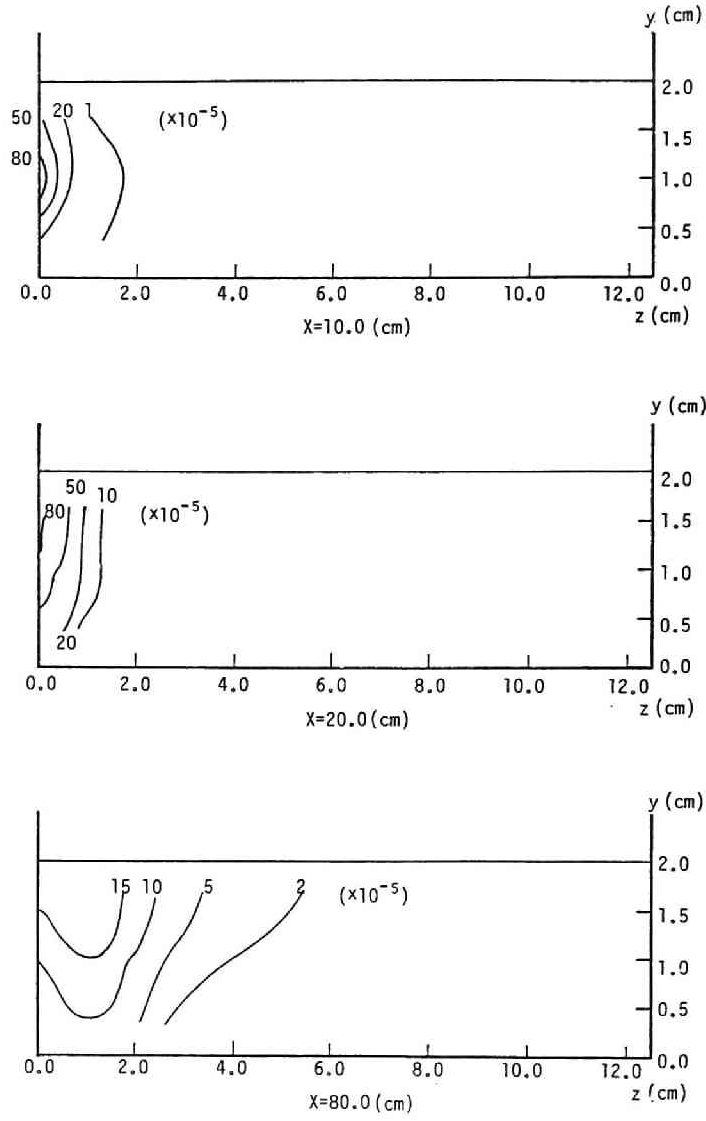


図4.3 濃度変動強さの分布

$$x' = \frac{xU}{D_z}, \quad z' = \frac{zU}{D_z}, \quad C' = \frac{C}{C_0}, \quad \overline{c'^2} = \frac{\overline{c'^2}}{c'^2_0}, \quad \epsilon'_c = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c0}}$$

これらを用いれば (4.33)~(4.35) 式は次のようになる。ただし、簡単のため無次元量の'をとる。

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial x} = \frac{2}{\alpha} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial z} \right) - \beta \epsilon_c \quad (4.38)$$

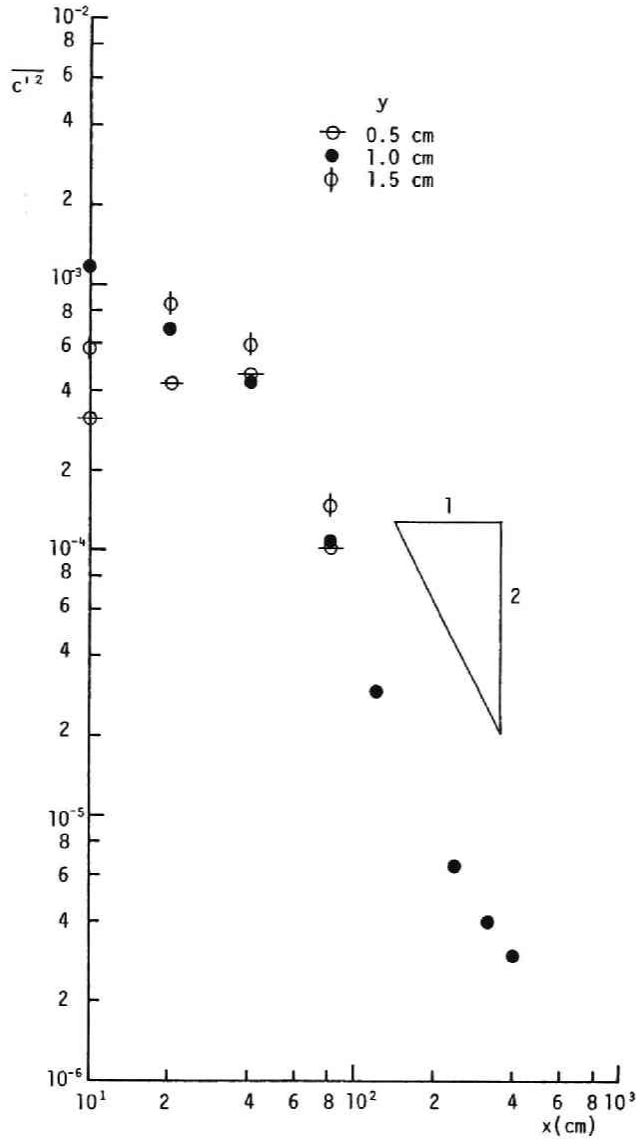


図4.4 濃度変動強さの減衰過程 ($z = 0.0\text{cm}$)

$$\frac{\partial \epsilon_c}{\partial x} = \left[\frac{c_{\epsilon_c}}{\alpha} \frac{\epsilon_c}{c'^2} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2, \frac{c_{\epsilon_c} \gamma}{\alpha \beta} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \epsilon_c}{\partial z} \right) - \frac{(\delta + 1) + (2/3) \beta \frac{\epsilon_c^2}{c'^2} - \frac{c_{\epsilon_2}}{3} \gamma \epsilon_c}{\delta + 1} \quad (4.39)$$

ここに, α , β , γ は次式で定義される無次元パラメータである。

$$\alpha = \frac{\overline{c'^2_0}}{C_0^2}, \quad \beta = \frac{D_z \epsilon_{c_0}}{U^2 c'^2_0}, \quad \gamma = \frac{D_z \epsilon}{U^2 k}$$

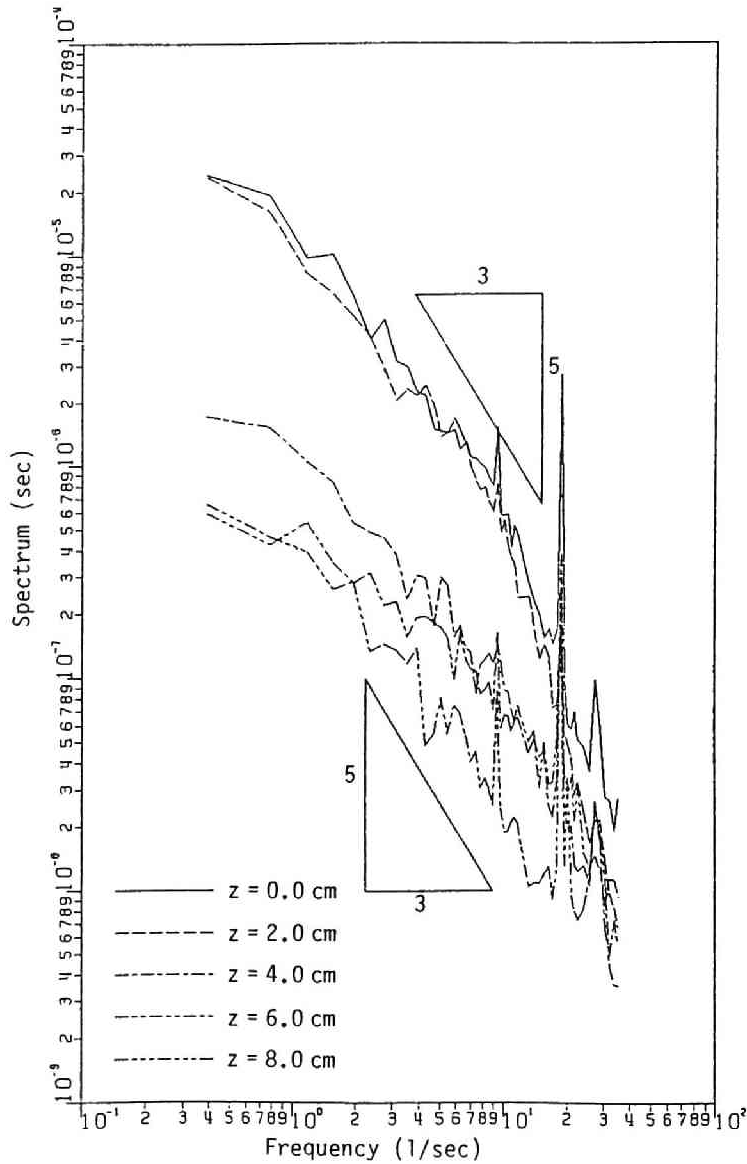


図4.5 濃度変動のスペクトル ($x = 80.0\text{cm}$, $y = 1.0\text{cm}$)

次に α , β , γ の与え方が問題となる。放出点から最も近い測定断面 $x = 10\text{cm}$ での濃度が 0.1% , $\overline{c'^2}$ が 1.0×10^{-3} 程度であることから, $C_0 = 0.1$, $\overline{c'^2}_0 = 1.0 \times 10^{-3}$ と考え $\alpha = 1.0 \times 10^{-1}$ とする。 ϵ_{c_0} を Launder²⁾ に従い $\epsilon_c = 2\overline{\epsilon c'^2}/k \cdot c_T'$ ($c_T' = 1.6$) と簡単に推定すれば, 水深の $1/2$ の点では $k \doteq 2u_*'^2$, $\epsilon \doteq 3u_*'^2/h$ 程度と考えられるため, $\epsilon_{c_0} \doteq 1.88\overline{c'^2}_0 u_*'/h$ となり, ϵ_{c_0} は $\overline{c'^2}_0$ と同程度の値となる。よって, 第3章で述べた方法で求めた $D_z = 0.56$ (cm^2/sec), 断面平均流速 $U = 31.06$ (cm/sec) より β , γ のオーダーを推定し, $\beta = 0.5 \times 10^{-3}$, $\gamma = 1.0 \times 10^{-3}$ とした。また, $\delta = 4$ とした。なお, 表4.2に計算条件を示している。

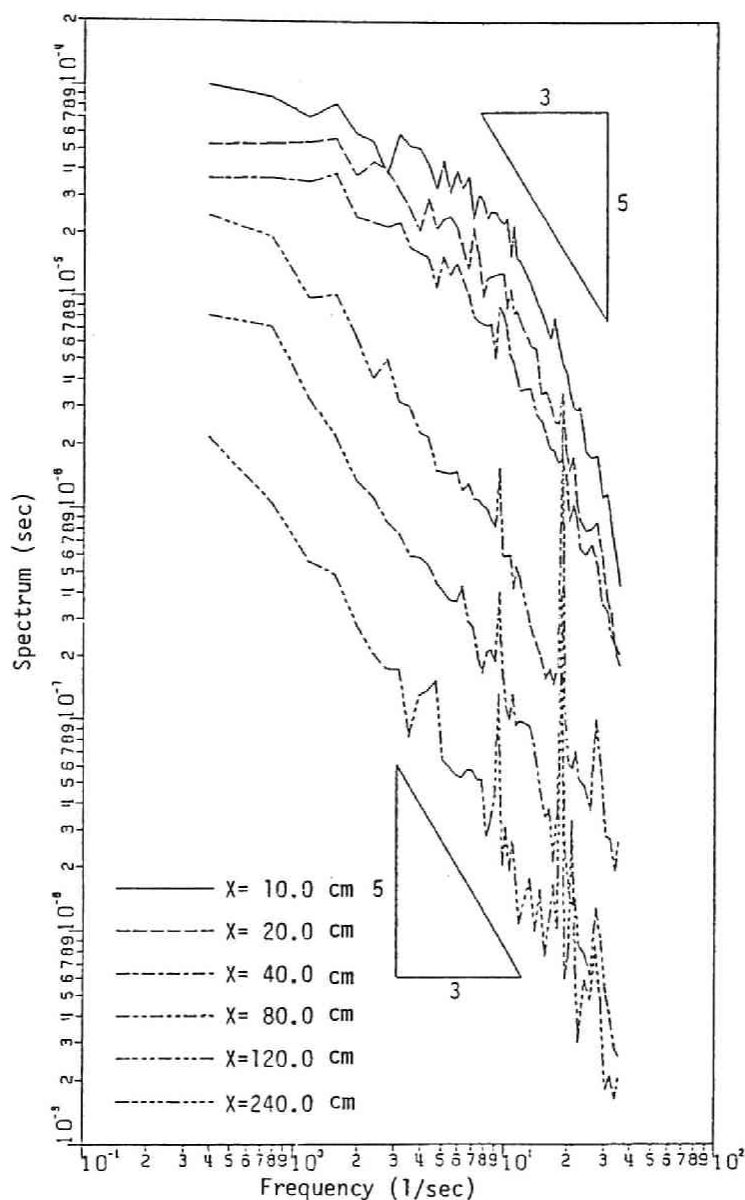


図4.6 濃度変動のスペクトル ($y = 1.0\text{cm}$, $z = 0.0\text{cm}$)

図4.7に濃度分布の計算結果と実験値の比較を示した。濃度分布は計算条件に依存せず、得られた濃度分布形を用いて $\overline{c'^2}$, ϵ_c を求めることになる。

図4.8(a), (b)に $z = 0$ での $\overline{c'^2}$ の流下方向の減衰過程を示した。本実験の範囲では、 ϵ_c —方程式の生成項の表示として $c_{ec}(-\overline{w'c'})\frac{\epsilon}{k}\frac{\partial C}{\partial z}$ とおいた方が実験値と適合している。そこで、Run 4～6の条件での $\overline{c'^2}$ の水路幅方向の分布形を図4.9に示した。放出口からの流下とともに、両者は適合してくる。また、 z の増加とともに、 $\overline{c'^2}$ は一度増加してから減少するという分布形の特徴が再現されている。

表4.2 計算の条件

	production term of ε_c -eq.	c_{ε_c}
Run 1	$c_{\varepsilon_c} \frac{\varepsilon_c}{c^{1/2}} D_z \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2$	3.0
Run 2		3.5
Run 3		4.0
Run 4	$c_{\varepsilon_c} \frac{\varepsilon_c}{k} D_z \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2$	5.0
Run 5		6.0
Run 6		7.0

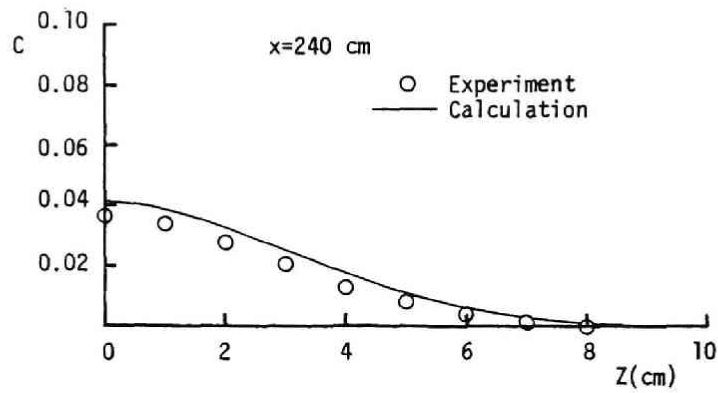


図4.7 濃度の水路幅方向分布

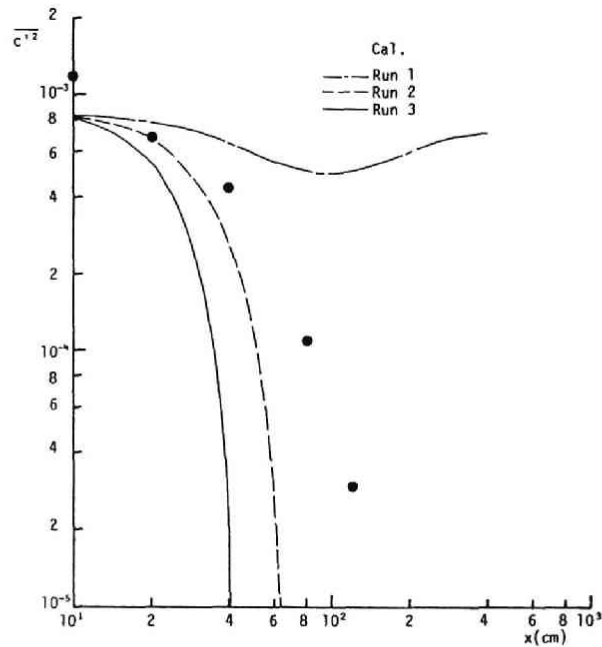


図4.8(a) 濃度変動強さの減衰過程 ($z = 0.0\text{cm}$)

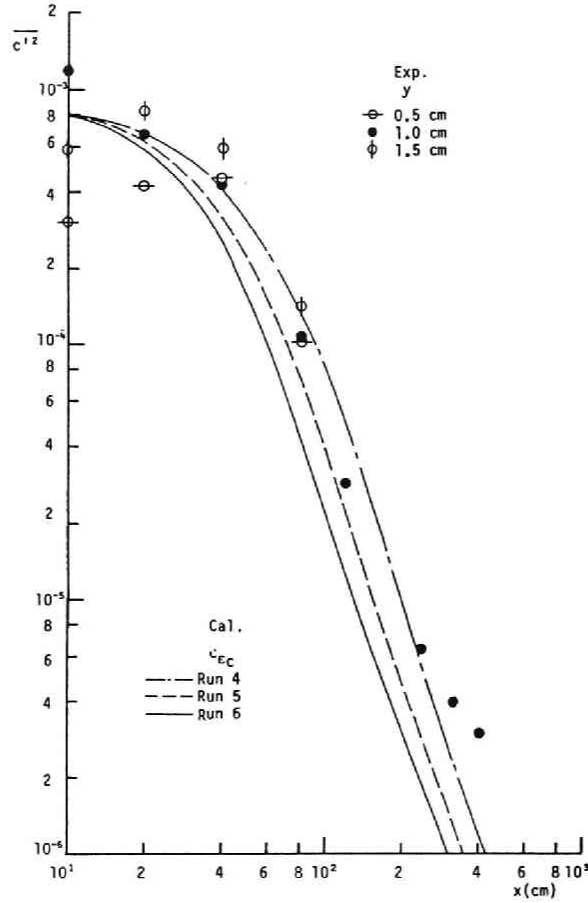


図4.8(b)

る。図4.10には ϵ_c の分布形を示した。 $\overline{c'^2}$ と同様、 z とともに一度増加してから減少している。

上に述べたように、 ϵ_c 方程式の生成項の表示として $c_{\epsilon c}(-\overline{w'c'})\frac{\epsilon}{k}\frac{\partial C}{\partial z}$ が妥当なことが示された。Gibson・Jones・Kanellopoulos⁸⁾によっても同様の結果が示されている。この結果を用いて ϵ_c の簡易的な表示を示そう。 $\overline{c'^2}-\epsilon_c$ 方程式において、生成項と散逸項が平衡しているとすれば次式が得られる。

$$2D_z\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)^2 = \epsilon_c \quad (4.40)$$

$$c_{\epsilon c}\frac{\epsilon}{k}D_z\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)^2 = \frac{(\delta+1)+\frac{2}{3}}{\delta+1}\frac{\epsilon_c^2}{c'^2} + \frac{c_{\epsilon 2}}{3}\frac{\epsilon_c\epsilon}{k} \quad (4.41)$$

上式より $D_z(\partial C/\partial z)^2$ を消去すれば

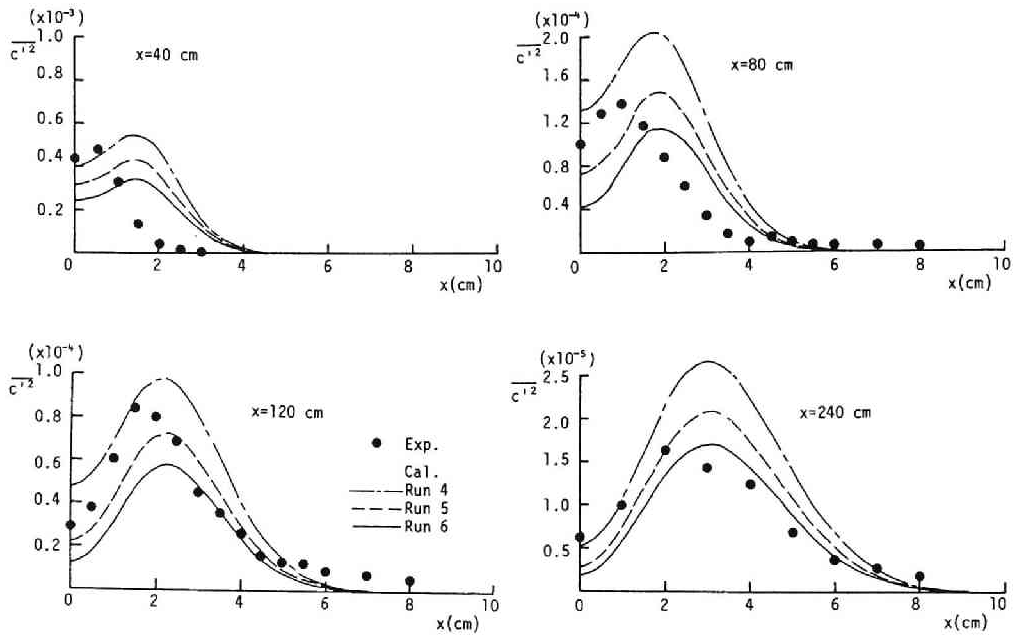


図4.9 濃度変動強さの水路幅方向分布

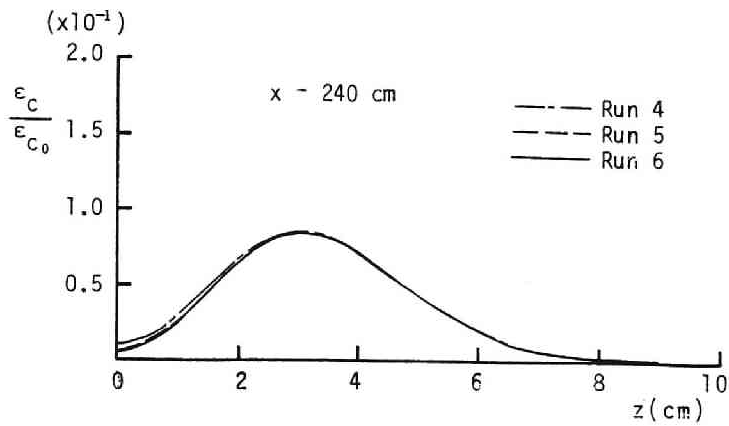


図4.10 ϵ_c の水路幅方向分布

$$\epsilon_c = \frac{\frac{c_{\epsilon_c}}{2} - \frac{c_{\epsilon_2}}{3}}{(\delta+1) + 2/3} \frac{c'^2 \epsilon}{k} \quad (4.42)$$

が得られ、これを (4.40) 式に代入すれば次式となる。

$$\overline{c'^2} = \frac{k}{\epsilon} \frac{2 \frac{(\delta+1)+2/3}{\delta+1}}{\frac{c_{\epsilon c}}{2} - \frac{c_{\epsilon_2}}{3}} D_z \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 = c_\gamma \frac{k}{\epsilon} D_z \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 \quad (4.43)$$

これは、Launder²⁾が成層流の乱流構造の解析のために、次元解析的に導いた式と同一であり、(4.43)式では定数の構成が明らかとなっている。Launder は比例定数 c_γ として1.6を用いている。(4.43)式において $\gamma = 4$, $c_{\epsilon c} = 6$, $c_{\epsilon_2} = 1.92$ として c_γ を推定すれば0.96となり Launder の用いている値よりかなり小さく、モデル定数 $c_{\epsilon c}$ 等のより一層の検討が必要と考えられる。

4.3 結語

本章では、第3章において平均濃度の分布特性がほぼ把握できたので、同様の場での濃度変動の特性量、特に濃度変動強さ $\overline{c'^2}$ の分布形について理論的、実験的に検討し、次のような知見を得た。

- ① 第2編第1章で述べる $k-\epsilon$ モデルと同様に、Kármán-Howarth 方程式に対応する濃度変動の空間相関係数 $R_{c,c}$ あるいはそのスペクトル表示 $E_{c,c}$ を規定する関係式に、相関関数、スペクトル関数の相似性の仮定を用いて、 ϵ_c -方程式の散逸項の表示(4.16)式を得た。その表示の中に現れる定数 $[(\delta+1)+2/3]/(\delta+1)$ は δ の値にかかわらず1から5/3の間に存在する。
- ② 次に、 ϵ_c -方程式の生成項について若干の考察を加えた。すなわち、長さのスケールとして $k^{3/2}/\epsilon$ と $(\overline{c'^2}/\epsilon_c)^{3/2}\epsilon^{1/2}$ を用いたとき、生成項の表示として各々(4.25a)、(4.25b)式を得た。
- ③ これらの考察をもとに、開水路流れの中に点源として連続的に放出された物質の、濃度変動場の伝播特性、すなわち、 $\overline{c'^2}$ 、 ϵ_c の分布形の流下過程の解析を行い、実験結果と比較した。その結果、 ϵ_c -方程式の生成項の表示として(4.25a)式を用いるとき、濃度変動強さ $\overline{c'^2}$ の減衰過程と水路幅方向の分布形をほぼ再現できた。そのとき、 $c_{\epsilon c}$ の値は5～7程度である。
- ④ 以上の結果は、 ϵ -方程式の浮力項の表示とそのモデル定数の推定に適用できる。 ϵ -方程式の浮力項は $-2\nu \frac{g_i}{\rho_\alpha} \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}$ と表すことができ、(4.6)式の右辺第2項と同様である。よって、 ϵ -方程式の浮力項は

$$-2\nu \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} = -c_{\epsilon_3} \overline{u_i' \rho'} \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

と表示でき、 c_{ϵ_3} は $c_{\epsilon c}/2$ となる。

参考文献

- 1) Csanady, G. T. : Concentration fluctuations in turbulent diffusion, J. Atmospheric Science, Vol.

24, pp. 21-28, 1967.

- 2) Launder, B. E. : On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum, J. Fluid Mech., Vol. 67, pp. 569-581, 1975.
- 3) 岩佐義朗, 細田 尚, 松井健一 : 開水路流れにおける濃度変動場の伝播特性, 京都大学防災研究所年報 第29号 B2, pp. 529-537, 1986.
- 4) Iwasa, Y., Hosoda, T. and Matsui, K. : Analysis of transverse distributions of $\overline{c'^2}$ by means of $\overline{c'^2} - \epsilon_c$ equations, Proc. 3rd Int'l Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, IAHR, Tokyo, pp. 19-26, 1988.
- 5) Hinze, J. O. : Turbulence, 2nd edn., McGraw-Hill, 1975.
- 6) Pao, Y.H. : Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wavenumbers, Physics Fluids, Vol. 8, Num. 6, pp. 1063-1075, 1965.
- 7) Newman, G.R., Launder, B. E. and Lumley, J.L. : Modelling the behaviour of homogeneous scalar turbulence, J. Fluid Mech., Vol. 111, pp. 217-232, 1981.
- 8) Gibson, M. M., Jones, W. P. and Kanellopoulos, V. E. : Turbulent temperature mixing layer; Measurement and Modelling, Turbulent Shear Flows 6, Springer-Verlag, pp. 119-128, 1989.

第2編 開水路流れにおける乱流拡散現象の 乱流モデルによる解析

第1編では、Lagrange 的解析法、Euler 的解析法の二つの観点から、乱流拡散係数の推定法について考察した。そこでは、物質の存在が流れに影響を及ぼさないことを前提にしており、第1編第1、2章において検討したように、乱流拡散係数は何らかの Euler 的乱れ特性量で構成される。もちろん第1編第3章で示したように、乱れ特性量が巨視的な水理量で規定されるため、乱流拡散係数と乱れ特性量を規定する水理量との関係を求めることも重要である。しかし、より一般には、まず乱れ特性量を何らかの方法で推定し、その結果を用いて乱流拡散係数を求めることが考えられる。さらに、物質の濃度分布だけでなく、流速分布、水温分布の拡がりを検討する際には、流速、水温の他に何らかの乱れ特性量を推定することが、より精度のよい予測のために必要とされる場合もある。

乱れ特性量、特に乱流状態での流体の運動方程式 (Reynolds 方程式) 中に現れる Reynolds 応力 $-\rho \overline{u_i' u_j'}$ を推定する方法の一つとして、乱流モデルを用いた解析法が挙げられる。現在、乱流モデルとは2-方程式モデルに属する $k-\epsilon$ モデルと、Reynolds 応力方程式を直接解く応力モデルの二つを指すことが多い。 $k-\epsilon$ モデルは単純で解析も容易であるが、乱流構造の三次元性を考慮できないという欠点を持つ。応力モデルは乱流構造の三次元性を考慮できるが、解くべき基礎式の数が多く、またモデル化とそれに伴う定数の値について、まだ検討を必要とする点もある。現時点では、対象とする現象と目的に応じて両者を使い分ける必要があると思われる。

本編では、乱流モデルを用いて求められた乱れ特性量から乱流拡散係数を推定する方法について検討する。その際、第1編第1、2章で検討したような乱流拡散係数と乱れ特性量の関係が用いられる。ただし、密度が空間的に非一様な場や、砂粒子のように流体粒子に完全に追従しない場合の乱流拡散現象には、第1編第1、2章で用いた方法は容易に適用できず、密度の非一様性や流体中の砂粒子の存在を考慮した乱流拡散係数の表示を検討する必要がある。このような個々の現象での乱流拡散係数の推定法について述べる前に、乱れ特性量の推定を行うにあたって基本となる乱流モデルの概要を示そう。

第1章 乱流モデルの考察

1.1 減衰する一様等方性乱流場での乱流モデル

一様等方性乱流は、最も理想化された乱流である。まず、一様等方性乱流場で乱流モデルがどのよう
に構成されるかを示そう。

基礎式は Kármán—Howarth 方程式¹⁾

$$\frac{\partial(\overline{u^2 f})}{\partial t} - (\overline{u^2})^{3/2} \left(\frac{\partial s}{\partial r} + 4 \frac{s}{r} \right) - 2\nu \overline{u^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.1)$$

あるいは、そのスペクトル表示

$$\frac{\partial E}{\partial t} = F - 2\nu q^2 E \quad (1.2)$$

である。ここに、 f ; 二重速度縦相関係数、 s ; 三重速度相関係数、 $\overline{u^2}$; 乱れ強さ、 E ; エネルギー・スペ
クトル関数、 F ; エネルギー輸送関数、 q ; 波数ベクトル $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ の大きさ。

(1.2) 式に現れるエネルギー輸送関数 F を E を用いて表すために、多くの研究がなされてき
た^{1,2)}。

一般に、 E は (1.2) 式右辺第 2 項で表される乱れエネルギーの熱への変換により減衰して行く。
しかし、波数 q の十分小さい領域では $2\nu q^2 E$ も十分小さいため、 E の低波数領域は時間的に変化し
ない²⁾。これは、乱流場の大局的構造の時間的不変性¹⁾と呼ばれているものであり、Tatsumi 等³⁾の準
正規分布の仮定を用いた計算結果をみても、この不変性が成立しているのがわかる。図1.1にエネル
ギー・スペクトル E の減衰の概念図を示す。

この E の低波数での不変性は、 $\lim_{q \rightarrow 0} E(q) \propto q^{2m}$ とすれば、

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial^{2m} E(q)}{\partial k^{2m}} = \frac{2m}{\pi} (-1)^{m+1} \overline{u^2} \left[2(1-m) \int_0^\infty r^{2m} f(r) dr + \lim_{r \rightarrow \infty} (r^{2m+1} f(r)) \right] = \text{一定} \quad (m > 1) \quad (1.3)$$

より、積分量

$$\Lambda = \overline{u^2} \int_0^\infty r^\sigma f(r) dr \quad (\sigma = 2m) \quad (1.4)$$

の時間的不変性に他ならない。

一方、多くの実験、観測結果より、 $E(q)$ には慣性領域と呼ばれる $-5/3$ 乗で減衰する領域と、そ
れに続く $-5/3$ 乗より急に減衰する粘性領域の存在が確認されている。その関数形として、たとえ

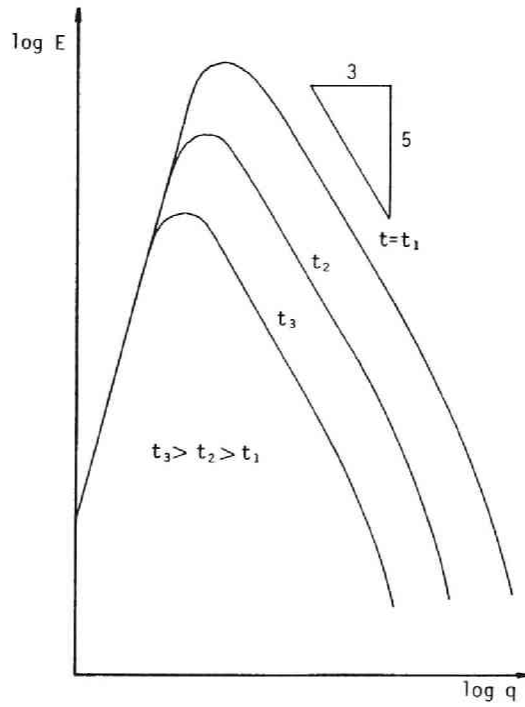


図1.1 エネルギー・スペクトルの減衰過程

ば Hinze⁴⁾の示している式は次のようである。

(低波数領域と慣性領域に対して)

$$E(q) = \frac{55}{9} \frac{\Gamma(\frac{1}{6})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{3})} \frac{\overline{u^2}}{q_e} \frac{(q/q_e)^4}{[1+(q/q_e)^2]^{17/6}}, \quad q_e = \frac{0.51}{\alpha} \frac{\epsilon}{(\overline{u^2})^{3/2}} \quad (1.5)$$

(慣性領域と粘性領域に対して)

$$E(q) = A \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \exp\left[-\frac{3}{2} A \frac{\nu k^{4/3}}{\epsilon^{1/3}}\right] \quad (1.6)$$

(1.6) 式は Pao⁵⁾のスペクトルと呼ばれ、 $A = 1.7$ である。そのとき、 $\alpha \doteq 0.4$ となる。 ϵ はエネルギー散逸率である。 $E(q)$ を一つの関数で表すためには、定義式

$$\frac{3}{2} \overline{u^2} = \int_0^\infty E(q) dq \quad (1.7)$$

$$\epsilon = 2\nu \int_0^\infty q^2 E(q) dq \quad (1.8)$$

を用いて (1.5), (1.6) 式を接続することが考えられ⁶⁾, 乱れ Reynolds 数 $Re_\tau = k^2/\nu\epsilon$ ($k = \sqrt{3}\overline{u^2}/2$)

無限大の極限が (1.5) 式である。すなわち、 $E(q)$ は一般には $q' = q \cdot k^{3/2}/\epsilon$ と Re_τ の関数であるが、 Re_τ が十分大きい領域を考えて、 $E(q)$ が無次元波数 q' で普遍関数表示されるとする。そのとき、 $L = Ck^{3/2}/\epsilon$ とおけば、 $f(r)$ も $r' = r/L$ で普遍関数表示されることになる。すなわち、(1.4) 式は

$$\Lambda = kL^{\sigma+1} \int_0^\infty r'^\sigma f(r') dr' \quad (1.9)$$

と書くことができる。先に述べたことより、 $k \cdot L^{\sigma+1}$ が時間的に一定であるから、これを時間で微分し、定義式

$$\frac{dk}{dt} = -\epsilon \quad (1.10)$$

を用いれば、

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (1.11a)$$

$$c_{\epsilon_2} = \frac{3\sigma+5}{2(\sigma+1)} \quad (1.11b)$$

が得られる^{7,8)}。(1.10), (1.11) 式が一様乱流場での乱流モデルであり、 c_{ϵ_2} は σ の値にかかわらず 1.5 と 2.5 の範囲にある。 $k-\epsilon$ モデルで用いられている 1.92 はこの範囲に入っている。

(1.10), (1.11a) 式は、時間が経過すれば

$$\frac{k}{k_a} = \left(\frac{t}{t_a}\right)^{-\frac{1}{c_{\epsilon_2}+1}} = \left(\frac{t}{t_a}\right)^{-\frac{\sigma+1}{\sigma+3}} \quad (1.12a)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_a} = \left(\frac{t}{t_a}\right)^{-\frac{c_{\epsilon_2}}{c_{\epsilon_2}+1}} = \left(\frac{t}{t_a}\right)^{-\frac{3\sigma+5}{\sigma+3}} \quad (1.12b)$$

と表せるべき乗解に従う。ただし、その領域では

$$\frac{\epsilon_a t_a}{k_a} = \frac{2(\sigma+1)}{(\sigma+3)} = \frac{1}{c_{\epsilon_2}-1} \quad (1.13)$$

となる。

1.2 で述べる ϵ -方程式は、一様乱流場では

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} - 2 \overline{\left(\nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2}$$

となり、 Re_τ 無限大での右辺の表示として (1.11a) 式を用いることになる。

1.2 応力モデルと $k-\epsilon$ モデル

一様乱流場での乱流モデルは ϵ -方程式の散逸項の表示に用いられるが、Reynolds 応力を閉じる問題には直接関与しない。Reynolds 応力に関する検討を行うため、 $-\overline{u_i' u_j'}$ の満たす関係式を導き、新たに現れる未知量を既知の量で表わすことが考えられてきた^{9,10)}。これは総称して応力モデルと呼ばれ、 $k-\epsilon$ モデルは応力モデルを簡略化したものと解釈されている¹¹⁾。まず応力モデルの概要を示そう。

(1) 応力モデルの概要

基礎式は次の Navier-Stokes 方程式である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (1.14)$$

ここに、 u_i : 流速ベクトルの成分、 g_i : 重力加速度ベクトルの成分、 p : 圧力、 ν : 動粘性係数、 ρ : 流体の密度、 t : 時間、 x_i : 空間座標を表す。(1.14) 式では総和の規約が用いられている。

(1.14) 式で、 u_i 、 p を時間平均値 U_i 、 P とそれよりの偏差 u_i' 、 p' に分けた後、Reynolds の条件¹²⁾を用いて時間平均をとれば次式が得られる。

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{u_i' u_j'}) + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \quad (1.15)$$

上式は Reynolds 方程式と呼ばれるものである。誘導の過程で乱れ速度 u_i' の連続式

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0 \quad (1.16)$$

を用いている。以後、簡単のため変動量の'を省略する。

(1.14) 式より (1.15) 式を引けば、乱れ速度に関する関係式が得られる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k - \overline{u_i u_k}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_i} \quad (1.17)$$

(1.17) 式に u_j を乗じ、(1.17) 式の i を j に変えたものに u_i を乗じて加えれば、 $\overline{u_i u_j}$ に関して次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = & - \left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right] - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\ & + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

(1.18) 式中、右辺第 3 項が pressure-strain term と呼ばれ、その既知量による表示に関して多くの研究がある。古くは Rotta⁹⁾ に始まり、現在では Launder・Reece・Rodi¹⁰⁾ の結果を用いることが多いようであるが、最近でもより詳細な理論的研究が進められている^{13,14,15)}。

pressure-strain term は、次のように性質の異なる二つの体積積分項 ϕ_{ij} と、対象とする乱流場の境界積分項 $\phi_{ij,w}$ の和として表せる。

$$\frac{\rho}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{4\pi} \int_{V(x^{(1)})} \left[\left(\frac{\partial^2 u_i' u_m'}{\partial x_i^{(1)} \partial x_m^{(1)}} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial U_i'}{\partial x_m^{(1)}} \cdot \frac{\partial u_m'}{\partial x_i^{(1)}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}|} + \phi_{ij,w} \quad (1.19)$$

$\phi_{ij,1}$
 $\phi_{ij,2}$

ここに、 \mathbf{x} : 考えている流れの領域内の点の座標、 $\mathbf{x}^{(1)}$: 積分変数、 $V(\mathbf{x}^{(1)})$: 流れの領域全体、 $'$: $\mathbf{x}^{(1)}$ の関数であることを示す。

$\phi_{ij,1} + \phi_{j,i,1}$ に関しては、Rotta の表示^{1,4)}

$$\Phi_{ij,1} = \phi_{ij,1} + \phi_{j,i,1} = -c_1 \frac{\epsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k) \quad (1.20)$$

が用いられることが多いが、より高次のモデル化も検討されている¹³⁻¹⁵⁾。

一方、 $\phi_{ij,2}$ に関しては $\overline{(\partial u_m' / \partial x_i^{(1)}) (\partial u_i' / \partial x_j)}$ が $\partial U_i' / \partial x_m^{(1)}$ に比べて急激に減衰すると考えて

$$\phi_{ij,2} = \frac{\partial U_i}{\partial x_m} a_{ij}^{mi} \quad (1.21)$$

$$a_{ij}^{mi} = -\frac{1}{2\pi} \int_{V(\mathbf{x}^{(1)})} \frac{\partial^2 u_m' u_i}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{d\xi}{|\xi|} \quad (1.22)$$

とおかれる。ここに、 $\xi = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}$ である。 a_{ij}^{mi} は条件式

$$\begin{aligned} a_{ij}^{mi} &= a_{ij}^{im} = a_{ji}^{im}, \\ a_{ii}^{mi} &= 0, \quad a_{jj}^{mi} = 2\overline{u_m u_i} \end{aligned} \quad (1.23)$$

を満たさねばならないことより、Launder 等¹⁰⁾ は a_{ij}^{mi} を $\overline{u_i u_j}$ の線形結合として表した。

$$\begin{aligned} a_{ij}^{mi} &= \alpha \overline{\delta_{ij} u_m u_i} + \beta (\overline{\delta_{mi} u_i u_j} + \overline{\delta_{mj} u_i u_i} + \overline{\delta_{ii} u_m u_j} + \overline{\delta_{ij} u_m u_i}) \\ &\quad + c_2 \overline{\delta_{mi} u_i u_j} + [\eta \overline{\delta_{mi} \delta_{ij}} + \nu (\overline{\delta_{mi} \delta_{ij}} + \overline{\delta_{mj} \delta_{ii}})] k \end{aligned} \quad (1.24)$$

(1.23) 式より 4 つの定数 α , β , η , ν が定数 c_2 により次のように表示される。

$$\alpha = \frac{1}{11}(4c_2 + 10), \quad \beta = -\frac{1}{11}(2 + 3c_2),$$

$$\eta = -\frac{1}{55}(50c_2+4), \quad \nu = \frac{1}{55}(20c_2+6)$$

以上より, $\Phi_{ij,2} = \phi_{ij,2} + \phi_{ji,2}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\phi_{ij} + \phi_{ji})_2 = & -\frac{(c_2+8)}{11} \left\{ P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right\} - \frac{(30c_2-2)}{55} k \left\{ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right\} \\ & - \frac{(8c_2-2)}{11} \left\{ D_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (1.25)$$

ここに,

$$P_{ij} \equiv - \left[\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right], \quad P \equiv - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad D_{ij} \equiv - \left[\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right]$$

(1.19) 式中, 境界積分項 $\phi_{ij,w}$ は wall-reflection term と呼ばれ, Shir¹⁶⁾ により提案された次式が用いられている。

$$\begin{aligned} \Phi_{ij,w} &= \phi_{ij,w} + \phi_{ji,w} \\ &= c_{1,w} \frac{\epsilon}{k} f_i \cdot \left[\overline{u_k u_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i n_k n_j} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j n_k n_i} \right] \\ &\quad + c_{2,w} f_i \cdot \left[\overline{\Phi_{km,2} n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{\Phi_{ik,2} n_k n_j} - \frac{3}{2} \overline{\Phi_{jk,2} n_k n_i} \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

ここに, f_i は次式で定義される関数。

$$f_i = \frac{k^{3/2}}{2.5\epsilon} \cdot \frac{1}{l} \quad (l: \text{壁面より垂直に測った距離})$$

(1.26) 式は, 壁面に近づくほど壁面に垂直な方向の乱れを減少, 壁面に平行な方向の乱れを増加させるような効果を表している。

diffusion term ((1.18) 式右辺第 4 項) の内, $-\overline{u_i u_j u_k}$ は Hanjalić・Launder¹⁷⁾ の提案する

$$-\overline{u_i u_j u_k} = c_s \frac{k}{\epsilon} \left[\overline{u_i u_l} \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial \overline{u_k u_i}}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right] \quad (1.27a)$$

あるいは, より簡単に

$$-\overline{u_i u_j u_k} = c_s' \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k u_i} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_i} \quad (1.27b)$$

を用いることが多く, 残りの $\overline{\rho(\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j)}$ は通常無視される。

一方, dissipation term ((1.18) 式右辺第2項) は, 乱れ Reynolds 数が十分大きいとき, 乱れ速度の局所等方性を仮定して

$$2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon \quad (1.28)$$

とおかれる。

以上を合せて $\overline{u_i u_j}$ の関係式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = & - \left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right] - \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon \\ & - c_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) + \Phi_{ij,2} + \Phi_{ij,w} \\ & + c_s \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{k}{\epsilon} \left[\overline{u_i u_l} \frac{\partial u_j u_l}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial u_i u_l}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_l} \right] + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k^2} \end{aligned} \quad (1.29)$$

ここで, 図1.2に示すような, 主流 U_1 が x_2 のみの関数であり, かつ, 乱れエネルギーの生成率と散逸率がつりあっている流れを考えることにより, Rodi⁽¹¹⁾ が示しているように $k-\epsilon$ モデルの根拠が得られる。すなわち, (1.29) 式で移流項, 拡散項と壁面の効果が無視できるとき

$$-\overline{u_1 u_2} = \frac{k}{c_1 \epsilon} \left[\frac{3-c_2}{11} \overline{u_2^2} + \frac{30c_2-2}{55} k - \frac{8c_2-2}{11} \overline{u_1^2} \right] \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$$

となるが, Launder 等⁽¹⁰⁾ が示しているように

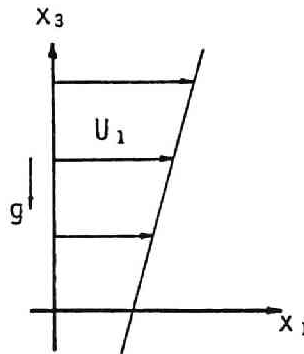


図1.2 概念図

$$\left. \begin{aligned} (\overline{u_1^2} - \frac{2}{3}k)/k &= (8+12c_2)/33c_1 \\ (\overline{u_2^2} - \frac{2}{3}k)/k &= (2-30c_2)/33c_1 \\ (\overline{u_3^2} - \frac{2}{3}k)/k &= (-10+18c_2)/33c_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

であるから、結局

$$-\overline{u_1 u_2} \propto \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \quad (1.31)$$

となり、 $k-\epsilon$ モデルと同様の表示となっている。

(2) $k-\epsilon$ モデルの概要

上に述べたように、 $k-\epsilon$ モデルは応力モデルの特殊な場合として位置づけることができる。一方、Reynolds 応力スペクトル

$$P(q) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{uv}(y) \cos(qy) dy \quad (R_{uv}; \text{乱れ速度 } u, v \text{ の相互相関係数})$$

の無次元形 $P'(q) = P(q)/(\frac{\partial U}{\partial y} \cdot k^{1/2} \cdot \epsilon^{-2})$ が無次元波数 $q' = q \cdot k^{3/2}/\epsilon$ で普遍的に表示できるということからも (1.31) 式が得られる。すなわち、渦動粘性係数を長さのスケール $L = k^{3/2}/\epsilon$ と乱れ強さ $k^{1/2}$ との積で表示することになり、Reynolds 方程式と $k-\epsilon$ 方程式で基礎式が構成される。一般には、無次元 Reynolds 応力スペクトル $P'(q)$ は無次元波数 q' だけでなく、乱れ Reynolds 数 $Re_T = k^2/\nu\epsilon$ の関数となり、そのとき (1.31) 式の比例定数は Jones・Launder モデル¹⁸⁾ で用いられているような Re_T の関数となる。

$k-$ 方程式は (1.18) 式において $i = j$ とし、1 から 3 までの和をとって 2 で除したものであり、次式となる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_j \left(k' + \frac{p}{\rho} \right)} \right] - \epsilon + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} \quad (1.32)$$

上式において $-\overline{u_i u_j}$ は渦動粘性係数 $D = c_\mu k^2/\epsilon$ を用いて

$$-\overline{u_i u_j} = D \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (1.33)$$

とおかれる。比例定数 c_μ は先に述べたように Re_T の関数と考えられ、次のような関数形が用いられている。

$$c_\mu = c_{\mu\infty} \exp[-2.5/(1 + Re_T/50)] \quad (\text{Jones・Launder}^{18)}) \quad (1.34a)$$

$$c_\mu = c_{\mu_0} \exp[-3.4/(1 + Re_T/50)^2] \quad (\text{Launder} \cdot \text{Sharma}^{19)}) \quad (1.34b)$$

一方、(1.32) 式右辺第 3 項は通常次のように表される。

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_j \left(k' + \frac{p}{\rho} \right)} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{D}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (1.35)$$

ϵ 方程式は、乱れ速度の関係式 (1.17) を x_j で微分し、 $2\nu \partial u_i / \partial x_j$ を乗じて時間平均を取ることににより次のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = & -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} \right) - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} - 2 \left(\nu \overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}} \right)^2 \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_k \epsilon} + \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) - 2\nu u_k \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j}} + \nu \overline{\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_k \partial x_k}} \end{aligned} \quad (1.36)$$

これらの各項は現在次式のように表示されることが多い。

$$\begin{aligned} -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} \right) &= c_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} D \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) & (a) \\ -2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} - 2 \left(\nu \overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}} \right)^2 &= -c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} & (b) \\ -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_k \epsilon} + \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{D}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] & (c) \\ -2\nu u_k \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j}} &= 2\nu D \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2 & (d) \end{aligned} \quad (1.37)$$

上式中、生成項(a)、散逸項(b)の表示は homogeneous shear flow turbulence の基礎式にスペクトル形の相似の仮定を用いて得られるが²⁰⁾、定数 c_{ϵ_1} 、 c_{ϵ_2} は c_μ と同様に Re_T の関数と考えられる。現在、Jones・Launder の提案している次式が用いられている。

$$c_{\epsilon_1} = c_{\epsilon_{1w}} \quad (1.38)$$

$$c_{\epsilon_2} = c_{\epsilon_{2w}} [1.0 - 0.3 \exp(-Re_T^2)] \quad (1.39)$$

(1.39) 式は 1.1 で述べた減衰する一様乱流場では、 Re_T が十分大きい状態から減衰終期の乱れ⁴⁾への接続を表す関数である。

以上が $k-\epsilon$ 方程式の概要であるが、 ϵ 方程式の壁面境界条件に関連して、Jones・Launder は k 方程式に次のような考察から付加項 (1.43) 式を加えることを提案している。

時間・空間において異なる (x, t) と $(x^{(n)}, t^{(n)})$ の乱れ速度の相関関数

$$R_{ij}(\mathbf{x}, t | \mathbf{r}, \tau) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}^{(1)}, t^{(1)})} \quad (\mathbf{r} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}, \quad \tau = t^{(1)} - t)$$

を考えると

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 R_{ii}(\mathbf{x}, t | \mathbf{r}, 0)}{\partial x_j \partial r_j} - \frac{\partial^2 R_{ii}(\mathbf{x}, t | \mathbf{r}, 0)}{\partial r_j \partial r_j} \Big|_{r=0} \quad (1.40)$$

であり、通常

$$\frac{\partial^2 R_{ii}(\mathbf{x}, t | \mathbf{r}, 0)}{\partial x_j \partial r_j} \Big|_{r=0} \ll \frac{\partial^2 R_{ii}(\mathbf{x}, t | \mathbf{r}, 0)}{\partial r_j \partial r_j} \Big|_{r=0}$$

と考えられている。

一方、図1.3を参照して、壁面に垂直な座標を y とし、壁面近くでの乱れ速度を u' , v' , w' とする。Jones・Launder¹⁸⁾は壁面近傍の乱れ速度に関する実験結果より

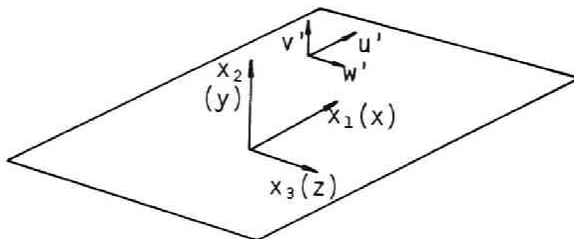


図1.3 壁面近傍の座標系

$$u' = a(t)y, \quad w' = b(t)y \quad (1.41)$$

とおいて、 $y = 0$ での乱れエネルギー散逸率の表示式

$$\nu \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 \right]_{y=0} = \nu(a^2 + b^2) \quad (1.42)$$

を導いている。

(1.41) 式を用いれば $R_{ii} = \overline{a(t)^2 y(y+r)} + \overline{b(t)^2 y(y+r)}$ であり、そのとき

$$\frac{\partial^2 R_{ii}}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 R_{ii}}{\partial y \partial r} = \overline{a^2 + b^2}$$

であり、壁面近傍では $\partial^2 R_{ii}(\mathbf{x}, t | \mathbf{r}, 0) / \partial x_j \partial r_j \gg \partial R_{ii}(\mathbf{x}, t | \mathbf{r}, 0) / \partial r_j \partial r_j$ となる。壁面上で $\epsilon = 0$ と

おくことは、(1.40) 式の $\partial^2 R_{ii}(\mathbf{x}, t | \mathbf{r}, 0) / \partial r_j \partial r_j$ の項のみを評価していることになり、壁面近傍での乱れエネルギーの収支を表していない。このことを考慮して、Jones・Launder は (1.32) 式右辺に (1.42) 式、すなわち

$$-\nu(\overline{a^2 + b^2}) = -\nu \left(\frac{d\sqrt{\overline{u'^2 + w'^2}}}{dy} \right)^2 = -2\nu \left(\frac{dk^{1/2}}{dy} \right)^2 \quad (1.43)$$

を付加することを提案した。(このとき、壁面上では $\epsilon = 0$ とおくことができる。)

以上、乱流モデルの概要を述べてきたが、次に第1編で考察してきた乱流拡散係数を、応力モデルによる解析結果を用いて推定する方法について検討する。

参考文献

- 1) Rotta, von J. C. : 大路通雄訳 (1975), 乱流, 岩波書店.
- 2) 巽 友正 : 乱流現象の科学, 東京大学出版会, 1986.
- 3) Tatsumi, T., Kida, S. and Mizushima, J. : The multiple-scale cumulant expansion for isotropic turbulence, J. Fluid Mech., Vol. 85, 1978.
- 4) Hinze, J. O. : Turbulence, 2nd edn., McGraw-Hill, 1975.
- 5) Pao, Y. H. : Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wavenumbers, Physics Fluids, Vol. 8, Num. 6, pp. 1063-1075, 1965.
- 6) 細田 尚, 余越正一郎 : Turbulent Reynolds 数が低い領域での ϵ -方程式の散逸項の表示, 第30回水理講演会論文集, pp. 517-522, 1986.
- 7) Hosoda, T., Iwasa, Y. and Yokosi, S. : Hydraulic analysis of turbulent jets by means of $k-\epsilon$ models, Kyoto Univ., School of Civil Eng., Research Report No. 84-HY-01, 1984.
- 8) 細田 尚, 岩佐義朗, 余越正一郎 : $k-\epsilon$ モデルによる水理解析に関する二, 三の検討, 京都大学防災研究所年報 第27号 B2, pp. 419-432, 1984.
- 9) Rotta, von J. C. : Statistische theorie nichthomogener turbulenz, Z. Phys., 129, pp. 547-572, 1951.
- 10) Launder, B. E., Reece, G. J. and Rodi, W. : Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure, J. Fluid Mech., Vol. 68, pp. 537-566, 1975.
- 11) Rodi, W. : Turbulence models and their application in hydraulics-A State of the Art Review, IAHR, Delft, The Netherlands, 1980.
- 12) アー・エス・モーニン, アー・エス・ヤグロム : 統計流体力学1 (山田豊一訳), 1977 (第2刷), 文一総合出版.
- 13) Weinstock, J. : Theory of pressure-strain-rate correlation for Reynolds-stress turbulence closure, Part 1. Off-diagonal element, J. Fluid Mech., Vol. 105, pp. 369-395, 1981.
- 14) Weinstock, J. : Theory of the pressure-strain rate, Part 2. Diagonal element, J. Fluid Mech., Vol.

- 116, pp. 1-29, 1982.
- 15) Weinstock, J. and Burk, S. : Theoretical pressure-strain term, experimental comparison, and resistance to large anisotropy, *J. Fluid Mech.*, Vol. 154, pp. 429-443, 1985.
 - 16) Shir, C. C. : A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows in the idealized planetary layer, *J. Atmospheric Sci.*, Vol. 30, pp. 1327-1329, 1973.
 - 17) Hanjalić K. and Launder, B. E. : A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 52, pp. 609-638, 1972.
 - 18) Jones, W. P. and Launder, B. E. : The prediction of laminarization with two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 301-314, 1972.
 - 19) Launder, B. E. and Sharma, B. I. : Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc, *Letters in Heat and Mass Transfer*, Vol. 1, pp. 131-138, 1974.
 - 20) 岩佐義朗, 細田 尚, 伊藤邦展 : 乱流モデルによる Buoyant Surface Jet に関する数値解析, 京都大学防災研究所年報 第30号 B2, pp. 583-595, 1987.

第2章 応力モデルによる乱流拡散係数の推定法

本章では、まず第1章で概説した応力モデルを用いて、開水路流れの乱れ特性量の推定を試みる。得られた乱れ特性量に関する計算結果と、第1編第1、2章での乱流拡散係数に関する考察を用いて、開水路流れの乱流拡散係数の推定法について検討する。

応力モデルは、Reynolds 応力方程式そのものを解いて Reynolds 応力の成分を求めるため、乱れ特性量に関して $k-\epsilon$ モデルより詳細な結果を得ることができる。第1編第2章で検討したように、空間の三方向の乱流拡散係数を推定するためには乱れ強さの各方向成分が必要であり、 $k-\epsilon$ モデルでは十分でない。そこで、まず広長方形断面を有する開水路流れを対象として、応力モデルによる乱れ特性量の推定法について述べよう。

2.1 基礎式とその特性¹⁾

対象とする流れの概要と用いる座標系を図2.1に示す。基礎式は、連続式、Reynolds 方程式、

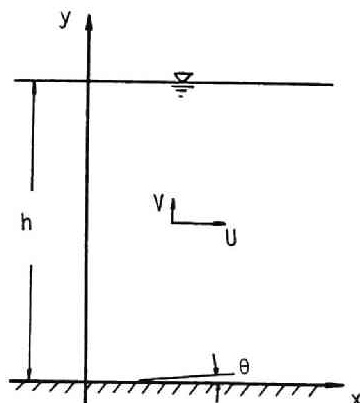


図2.1 座標系

Reynolds 応力方程式と ϵ -方程式から構成される。等流状態を考えており、時間平均された量の x に関する微係数を0と考えれば、連続式

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

より $V=0$ となる。ここに、 (U, V) : 時間平均流速ベクトルの x, y 方向成分。このとき、Reynolds 方程式の x 方向成分は

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g \sin \theta + \frac{\partial(-\overline{uv})}{\partial y} \quad (2.2)$$

となる。ここに、 g : 重力加速度、 θ : 路床こう配、 (u, v) : 変動流速ベクトルの x, y 方向成分である。また、 $-$ は時間平均を示す。

一方、Reynolds 応力方程式として、第 1 章で概説した Launder・Reece・Rodi²⁾ のモデルを用いれば、次のように表示される。

$$\frac{\partial \overline{uv}}{\partial t} = -\overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} + (\phi_{12,1} + \phi_{12,2} + \phi_{12,w}) f_s(y) + c_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\overline{v^2} k}{\epsilon} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} \right] \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial t} = -2\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{2}{3} \epsilon + (\phi_{11,1} + \phi_{11,2} + \phi_{11,w}) f_s(y) + c_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\overline{v^2} k}{\epsilon} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} \right] \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} = -\frac{2}{3} \epsilon + (\phi_{22,1} + \phi_{22,2} + \phi_{22,w}) f_s(y) + c_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\overline{v^2} k}{\epsilon} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} \right] \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \overline{w^2}}{\partial t} = -\frac{2}{3} \epsilon + (\phi_{33,1} + \phi_{33,2} + \phi_{33,w}) f_s(y) + c_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\overline{v^2} k}{\epsilon} \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial y} \right] \quad (2.6)$$

ここに、 $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$: 各々 x, y, z 方向の乱れ強さ、 k : 乱れエネルギー、 ϵ : 乱れエネルギー散逸率、 c_1, c_2, c_s : モデル定数である。また、pressure-strain 項 ϕ は次のように表せる。

$$\phi_{11,1} = -c_1 \frac{\epsilon}{k} (\overline{u^2} - \frac{2}{3} k)$$

$$\phi_{22,1} = -c_1 \frac{\epsilon}{k} (\overline{v^2} - \frac{2}{3} k)$$

$$\phi_{33,1} = -c_1 \frac{\epsilon}{k} (\overline{w^2} - \frac{2}{3} k)$$

$$\phi_{12,1} = -c_1 \frac{\epsilon}{k} \overline{uv}$$

$$\phi_{11,2} = -\frac{c_2 + 8}{11} \left(-2\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2}{3} \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{8c_2 - 2}{11} \left(\frac{2}{3} \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

$$\phi_{22,2} = -\frac{c_2 + 8}{11} \left(\frac{2}{3} \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{8c_2 - 2}{11} \left(-2\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2}{3} \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

$$\phi_{33,2} = -\frac{c_2 + 8}{11} \left(\frac{2}{3} \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{8c_2 - 2}{11} \left(\frac{2}{3} \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

$$\phi_{12,2} = -\frac{c_2 + 8}{11} \left(-\overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{30c_2 - 2}{55} \frac{\partial U}{\partial y} k - \frac{8c_2 - 1}{11} \left(-\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

$$\phi_{11,w} = c_{1,w} \frac{\epsilon}{k} f_l \overline{v^2} + c_{2,w} f_l \phi_{22,2} \quad (f_l \equiv k^{3/2} / (2.5 \epsilon y))$$

$$\phi_{22,w} = c_{1,w} \frac{\epsilon}{k} f_l (-2\overline{v^2}) + c_{2,w} f_l (-2\phi_{22,2})$$

$$\phi_{33,w} = c_{1,w} \frac{\epsilon}{k} \overline{f_i v^2} + c_{2,w} f_i \phi_{22,2}$$

$$\phi_{12,w} = c_{1,w} \frac{\epsilon}{k} f_i \left(-\frac{3}{2} \overline{uv} \right) + c_{2,w} f_i \left(-\frac{3}{2} \phi_{12,2} \right)$$

また, pressure-strain 項 ($p-s$ 項) に乗せられている関数 $f_s(y)$ は, 自由表面において, $\overline{(p/\rho)(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)}$ で定義される $p-s$ 項を 0 とするための修正関数であり, 次式を用いた。

$$f_s(y) \equiv 1 - \exp\left(-A \frac{\epsilon_s}{k_s^{3/2}}(h-y)\right) \quad (A: \text{定数}, h: \text{水深}) \quad (2.7)$$

上式中, 下添字 s は自由表面の値であることを示す。

Gibson・Rodi³⁾ は, $p-s$ 項に対する自由表面の影響として壁面補正 ϕ_w と同様に表される自由表面補正 ϕ_s を加え, $p-s$ 項 = $\phi_1 + \phi_2 + \phi_w + \phi_s$ と表している。しかし, このままでは自由表面に近づいても $p-s$ 項は 0 にならない。そこで本研究では, 自由表面での長さのスケール $\epsilon_s/k_s^{3/2}$ で自由表面からの距離 $(h-y)$ を無次元化し, 自由表面近傍で急激に 0 に近づく関数を乗ずることにより $p-s$ 項の挙動を表すことにした。

残された基礎式である ϵ -方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} (-\overline{uv}) \frac{\partial U}{\partial y} - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + c_{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\overline{v^2 k}}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] \quad (2.8)$$

基礎式 (2.2)~(2.6) と (2.8) 式で左辺に非定常項を残したのは, 適当に与えた初期条件より時間発展をとって, 定常状態に漸近させる方法を用いるためである。

Launder・Reece・Rodi¹⁾ や Gibson・Launder⁴⁾ が示しているように, (2.4)~(2.6) 式で非定常項と拡散項が無視できるとき, [(2.4)+(2.5)+(2.6)]/2 より得られる k -方程式

$$-\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} = \epsilon \quad (2.9)$$

を用いて

$$\left. \begin{aligned} \overline{\frac{u^2}{k}} &= \frac{3}{2} + \frac{c_{1,w}}{c_1} \frac{\overline{v^2}}{k} + \frac{1}{c_1} \left[\frac{4}{3} - \frac{12-4c_2}{11} + c_{2,w} \frac{-10c_2+8}{11} \right] \\ \overline{\frac{v^2}{k}} &= \frac{\frac{2}{3}(c_1-1) - \frac{-10c_2+8}{11}(2c_{2,w}-1)}{c_1+2c_{1,w}} \\ \overline{\frac{w^2}{k}} &= \frac{2}{3} + \frac{c_{1,w}}{c_1} \frac{\overline{v^2}}{k} + \frac{1}{c_1} \left[-\frac{2}{3} + \frac{6c_2+4}{11} + c_{2,w} \frac{-10c_2+8}{11} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

が得られる。ただし, この誘導過程において, (2.9) 式を用いて導かれる wall function 法における

壁面近傍の k , ϵ の値

$$k_\sigma = \frac{u_*^2}{\sqrt{c_\mu}}, \quad \epsilon_\sigma = \frac{u_*^3}{\chi \delta} \quad (\delta: \text{壁面からの距離}, \chi: \text{Kármán 定数})$$

から, $f_i \equiv k^{3/2}/(2.5\epsilon \cdot \delta) = \chi/(2.5c_\mu^{3/4}) \doteq 1$ とおいている。($c_\mu = 0.09$)

一方, (2.3) 式の非定常項, 拡散項が無視されるときには,

$$-\overline{uv} = \frac{1}{\left(c_1 + \frac{3}{2}c_{1,w}\right)} \left[\frac{\overline{v^2}}{k} + \left(1 - \frac{3}{2}c_{3,w}\right) \left(-\frac{c_2 + 8}{11} \frac{\overline{v^2}}{k} + \frac{30c_2 - 2}{55} - \frac{8c_2 - 2}{11} \frac{\overline{u^2}}{k} \right) \right] \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.11)$$

となり, Rodi が指摘しているように, (2.11) 式は (2.10) 式を代入することにより, k - ϵ モデルの渦動粘性係数の表示 $-\overline{uv} \propto (k^2/\epsilon) \cdot \partial U / \partial y$ となる。

2.2 解析方法

解析の手順は次のようである。ある時刻 $t = n \cdot \Delta t$ (Δt : 数値計算の時間間隔, n : 時間ステップ) での U^n , $\overline{u^{2n}}$, $\overline{v^{2n}}$, $\overline{w^{2n}}$, ϵ^n を既知として, (2.2)~(2.8) 式を差分化し $(n+1)$ ステップの U^{n+1} , $\overline{u^{2n+1}}$, $\overline{v^{2n+1}}$, $\overline{w^{2n+1}}$, ϵ^{n+1} を求める。この手順を, 計算結果が定常状態に達するまで繰り返した。

U , $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$, ϵ に関する境界条件は次のように与えた。まず, $y = \delta$ での k , ϵ を wall function 法で求め, k_σ を $\overline{u_\sigma^2}$, $\overline{v_\sigma^2}$, $\overline{w_\sigma^2}$ に配分した (表2.1)。Run 1 は (2.10) 式を用いて配分した場

表2.1 乱れエネルギーの配分

	$\overline{u^2}_\sigma/k_\sigma$	$\overline{v^2}_\sigma/k_\sigma$	$\overline{w^2}_\sigma/k_\sigma$
Run 1	0.99	0.34	0.67
Run 2	1.20	0.34	0.46

合である。 $y = \delta$ の U は,

$$\frac{U_\sigma}{u_*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{u_* \delta}{\nu} + A_s \quad (\chi = 0.4, A_s = 5.5)$$

で与えた。

自由表面での境界条件としては次式を用いた。

$$\left. \frac{\overline{v^2} k}{\epsilon} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} \right|_{y=h} = 0, \quad \overline{v^2} = 0, \quad \left. \frac{\overline{v^2} k}{\epsilon} \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial y} \right|_{y=h} = 0, \quad \left. \frac{\overline{v^2} k}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right|_{y=h} = 0$$

上に述べた境界条件のもとで、次の初期条件より出発して時間発展をとった。

$$\overline{u^2} = \overline{u_\sigma^2}, \quad \overline{v^2} = \overline{v_\sigma^2}, \quad \overline{w^2} = \overline{w_\sigma^2}, \quad -\overline{uv} = u_\star^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right), \quad \epsilon = \epsilon_\sigma,$$

$$\frac{U}{u_\star} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_\star y}{\nu} + A_s$$

数値計算を行う前に、次の無次元量を導入して基礎式を無次元化しよう。

$$\overline{u'^2} = \frac{\overline{u^2}}{u_\star^2}, \quad \overline{v'^2} = \frac{\overline{v^2}}{u_\star^2}, \quad \overline{w'^2} = \frac{\overline{w^2}}{u_\star^2}, \quad \overline{uv'} = \frac{\overline{uv}}{u_\star^2}, \quad \epsilon' = \frac{\epsilon h}{u_\star^3},$$

$$U' = \frac{U}{u_\star}, \quad y' = \frac{y}{h}, \quad t' = \frac{u_\star t}{h}$$

これらの無次元量を用いて (2.2)～(2.6), (2.8) 式を書き直すと、例えば (2.2) 式は

$$\frac{\partial U'}{\partial t'} = 1 + \frac{\partial \overline{uv'}}{\partial y'} \quad (2.2')$$

となり、その他の式は無次元量を示す'を省けば元の式と同じとなる。ただし、 U に関する境界条件は

$$U'_\sigma = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_\star h}{\nu} \cdot \delta' \right) + A_s$$

となり、無次元パラメータ $u_\star h / \nu$ が現れる。本節では以後、無次元量の'をとる。

図2.2を参照して、基礎式の離散化を例示すれば次のようになる。

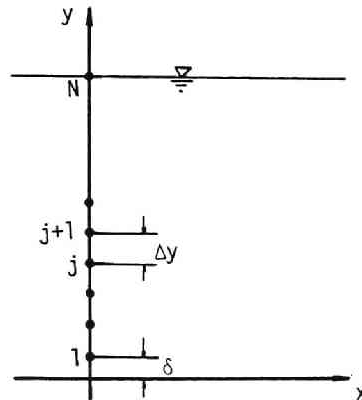


図2.2 差分格子

(U -方程式)

$j < N$ のとき

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = 1 + \frac{(-\overline{uv}_{j+1}^n) - (-\overline{uv}_{j-1}^n)}{2\Delta y} \quad (2.12)$$

$j = N$ のとき

$$\frac{U_N^{n+1} - U_N^n}{\Delta t} = 1 + \frac{0 - (-\overline{uv}_{N-1}^n)}{\Delta y} \quad (2.12')$$

($\overline{u^2}$ -方程式)

$j < N$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\overline{u_j^{2n+1}} - \overline{u_j^{2n}}}{\Delta t} = & -2\overline{uv_j^n} \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta y} - \frac{2}{3}\epsilon_j^n + (\phi_{11,1} + \phi_{11,2} + \phi_{11,w})_j^n f_s(y_j) \\ & + c_s \left(\frac{(\overline{v_{j+1}^{2n}} + \overline{v_j^{2n}})/2 \cdot (k_{j+1}^n + k_j^n)/2}{(\epsilon_{j+1}^n + \epsilon_j^n)/2} \cdot \frac{\overline{u_{j+1}^{2n}} - \overline{u_j^{2n}}}{\Delta y} - \right. \\ & \left. \frac{(\overline{v_j^{2n}} + \overline{v_{j-1}^{2n}})/2 \cdot (k_j^n + k_{j-1}^n)/2}{(\epsilon_j^n + \epsilon_{j-1}^n)/2} \cdot \frac{\overline{u_j^{2n}} - \overline{u_{j-1}^{2n}}}{\Delta y} \right) / \Delta y \end{aligned}$$

$j = N$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\overline{u_N^{2n+1}} - \overline{u_N^{2n}}}{\Delta t} = & -\frac{2}{3}\epsilon_N^n - (\phi_{11,1} + \phi_{11,2} + \phi_{11,w})_N^n f_s(y_N) \\ & + c_s \left(-\frac{(\overline{v_N^{2n}} + \overline{v_{N-1}^{2n}})/2 \cdot (k_N^n + k_{N-1}^n)/2}{(\epsilon_N^n + \epsilon_{N-1}^n)/2} \cdot \frac{\overline{u_N^{2n}} - \overline{u_{N-1}^{2n}}}{\Delta y} \right) / \Delta y \end{aligned}$$

その他の基礎式も同様である。

2.3 計算の諸条件

(1) モデル定数の値

基礎式中のモデル定数の値は次のように定めた。 c_1, c_2 は, Launder・Reece・Rodi²⁾により, Champagne・Harris・Corrsin⁵⁾の homogeneous shear flow turbulence の実験結果を用いて定められており, $c_1 = 1.5, c_2 = 0.4$ である。一方, c_s, c_ϵ の値として 0.25, 0.15 が用いられているが²⁾, $k-\epsilon$ モデルとの対応を考えると, c_s/c_ϵ が 1.67 とかなり大きい ($k-\epsilon$ モデルでは 1.3)。また, $\overline{v^2}$ を柵津⁶⁾の実験結果より推定される $\overline{v^2}/k \doteq 1/3$ として (2.8) 式の拡散項を表示し直すと

$$\frac{c_\epsilon}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right)$$

となり, $c_\epsilon/3$ の値は $c_\epsilon = 0.15$ を用いると, $k-\epsilon$ モデルで用いられている c_μ/σ_ϵ ($c_\mu = 0.09, \sigma_\epsilon = 1.3$) よりかなり小さい。これらの点を考慮して, 本研究では $c_s = 0.25, c_\epsilon = 0.20$ とした。

残された定数 $c_{1,w}$, $c_{2,w}$ は, $\overline{v^2}/k$ の値が従来の実験値に適合し, かつ (2.11) 式の $(k^2/\epsilon) \cdot \partial U / \partial y$ に掛る係数値が $k-\epsilon$ 定数 $c_\mu = 0.09$ にほぼ等しくなるように定めた。すなわち $c_{1,w} = 0.25$, $c_{2,w} = 0.02$ となった。

(2) κ , A_s の値

Kármán 定数 κ , 積分定数 A_s の値としては, 従来より用いられている $\kappa = 0.4$, $A_s = 5.5$ あるいは Nezu・Rodi⁷⁾ の提案する $\kappa = 0.41$, $A_s = 5.3$ が挙げられる。本研究ではとりあえず $\kappa = 0.4$, $A_s = 5.5$ を用いている。

(3) $u_* h / \nu$ の値

$u_* h / \nu$ の値は, 前述した流速の壁面近傍での境界条件中に現れる。しかし, この値を変化させても無次元化座標 y/h で見れば U/u_* の値を平行移動させるだけであり, $\overline{u^2}/u_*^2$, $\overline{v^2}/u_*^2$, $\overline{w^2}/u_*^2$ と $\epsilon h / u_*^3$ の値に影響を及ぼさない。これは, 本研究で用いているモデルが乱れ Reynolds 数の十分大きい領域のみを対象としているためで, 乱れ特性量に及ぼす $u_* h / \nu$ あるいは Reynolds 数の影響を考慮できない。計算に用いた $u_* h / \nu$ の値は 1022 である。

(4) 路床近傍の境界条件を与える y 座標

壁面近傍で境界条件を与える y 座標 δ は, $\delta/h = 0.05$ とした。すなわち, $u_* \delta / \nu = (\delta/h) \cdot (u_* h / \nu) = 51$ である。

2.4 計算結果の考察

以上述べてきた諸条件を用いて計算を行った。その中で, $p-s$ 項の自由表面補正関数 (2.7) 式に現れる係数 A を 6 ~ 100 と変化させている。また, 用いた Δy , Δt は, $\Delta y/h = 0.015$, $\Delta t \cdot u_*/h = 0.00064$ である。

(1) 定常化過程

図 2.3 に, $A = 100$ の場合の水理量の定常化過程を示した。時間の経過とともに定常状態に漸近して行くことがわかる。以後, この定常状態での分布形について検討しよう。

(2) 平均流速分布

図 2.4 に $A = 6, 10, 100$ の場合の流速分布を示した。10, 100 の場合対数則によく適合している。以後, $A = 10$ の計算結果を示す。

(3) 乱れ特性量の分布

図 2.5 に $\sqrt{u^2}/u_*$, $\sqrt{v^2}/u_*$, $\sqrt{w^2}/u_*$ の水深方向の分布を示した。図中には称津⁶⁾ の提案する式

$$\frac{\sqrt{u^2}}{u_*} = 2.3 \exp\left(-\frac{y}{h}\right) \quad 1$$

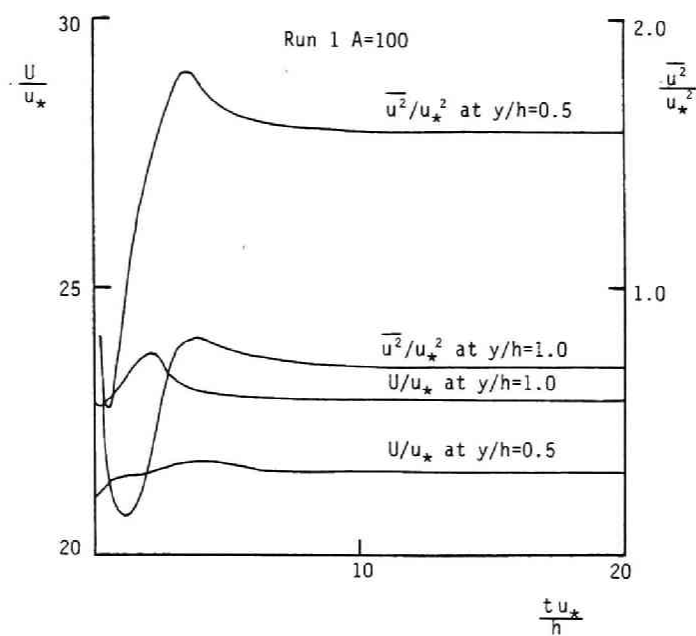


图2.3 定常化过程

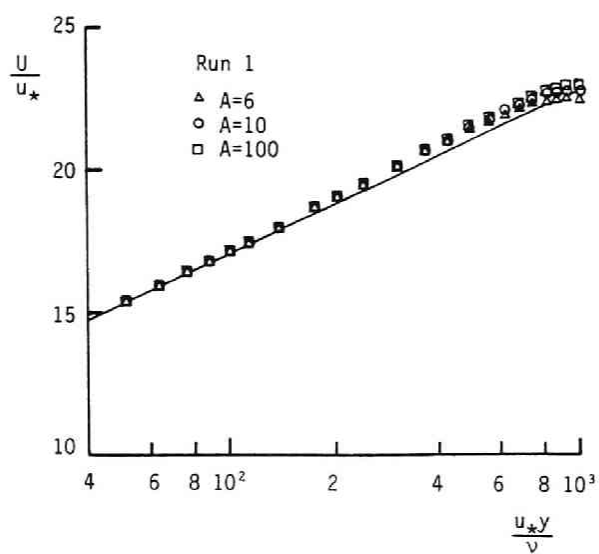


图2.4 流速分布

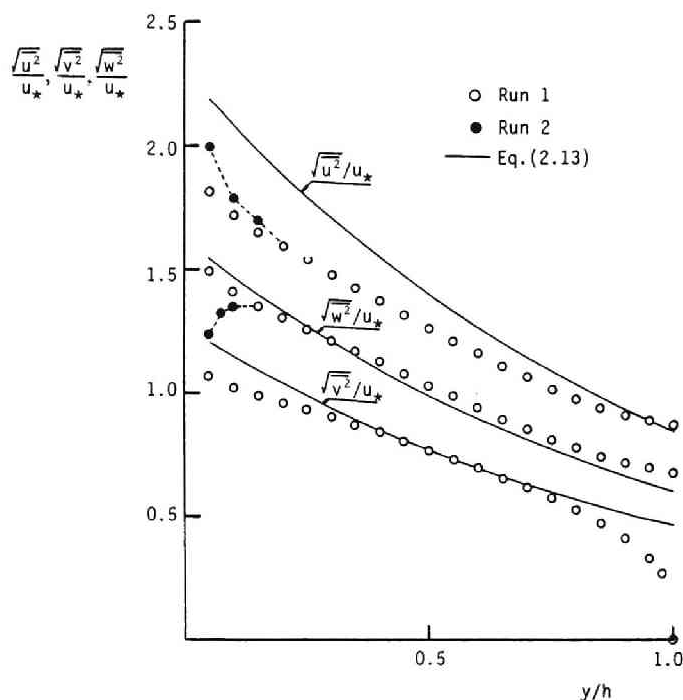


図2.5 乱れ強さの水深方向分布

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{v^2}}{u_*} &= 1.27 \exp\left(-\frac{y}{h}\right) \\ \frac{\sqrt{w^2}}{u_*} &= 1.63 \exp\left(-\frac{y}{h}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

も示してある。 $\overline{u^2}$ の路床近くの値以外、計算結果は (2.13) 式とよく適合している。また、今本・石垣⁸⁾ の計測結果に見られるように、 y/h が 0.8 以上になると $\overline{v^2}$ が急激に減少する様子がほぼ再現されている。Rodi⁹⁾ が考察しているように、 $\overline{v^2}$ が急激に減少する領域において、渦動粘性係数は $D \propto (\overline{v^2}/k) \cdot k^2/\epsilon$ と表せる。 $A = 10$ に対して $\overline{v^2}/k$ の計算結果を示したのが図2.6であり、図中にはその近似式

$$f_{vs}(y) = 0.34 \cdot \left\{ 1 - \exp\left[-B \cdot \frac{(h-y)\epsilon_s}{k_s^{3/2}}\right] \right\} \quad (B = 10) \quad (2.14)$$

も示してある。自由表面近くにおいても、上に示した $D \propto (\overline{v^2}/k) \cdot k^2/\epsilon$ が成り立つとすれば、(2.14) 式を用いた渦動粘性係数の表示として

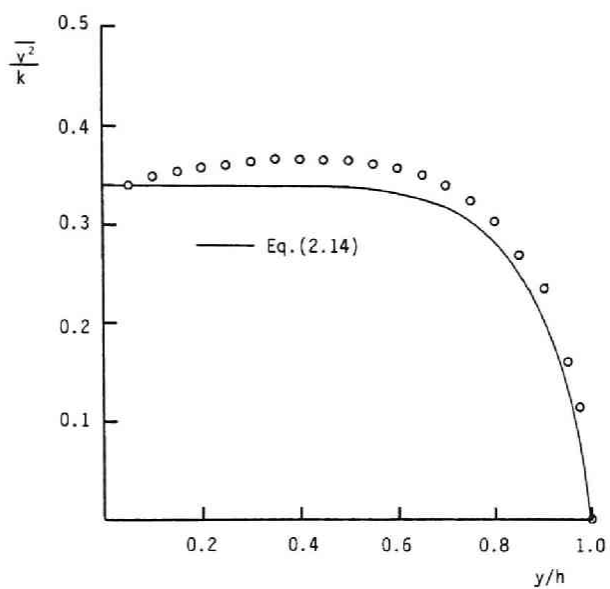


図2.6 $\overline{v^2}$ の水深方向分布

$$D = c_\mu \cdot \frac{f_{Ds}(y)}{f_{Ds}(-\infty)} \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.15)$$

が得られる。

図2.7には $\sqrt{u^2}$ に関する浅野¹⁰⁾ の提案する実験式

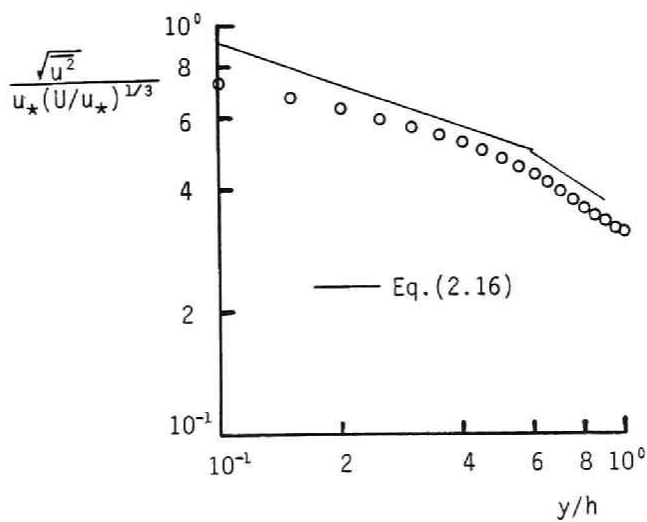


図2.7 $\sqrt{u^2}$ の水深方向分布

$$\left. \begin{aligned} 0.1 < \frac{y}{h} < 0.6 \quad \frac{\sqrt{u^2}}{u_* (U/u_*)^{1/3}} &= 0.42 \left(\frac{y}{h} \right)^{-1/3} \\ 0.6 < \frac{y}{h} < 0.9 \quad \frac{\sqrt{u^2}}{u_* (U/u_*)^{1/3}} &= 0.35 \left(\frac{y}{h} \right)^{-2/3} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

との比較を示した。計算結果は (2.16) 式より若干小さいが、 $y/h = 0.6$ 近傍で減衰のこう配が変化する (2.16) 式の特徴をよく再現している。

図2.8には、 $\epsilon h/u_*^3$ の水深方向の分布を示した。図中には祢津⁶⁾の提案する実験式

$$\frac{\epsilon h}{u_*^3} = 9.76 \frac{\exp\left(-3\frac{y}{h}\right)}{\sqrt{\frac{y}{h}}} \quad (2.17)$$

と、浅野¹⁰⁾の提案する次式も示してある。

$$\left. \begin{aligned} 0.1 < \frac{y}{h} < 0.6 \quad \frac{\epsilon h}{u_*^3} &= 1.1 \left(\frac{y}{h} \right)^{-1} \\ 0.6 < \frac{y}{h} < 0.9 \quad \frac{\epsilon h}{u_*^3} &= 0.63 \left(\frac{y}{h} \right)^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

計算結果は、これらの実験結果とほぼ適合している。

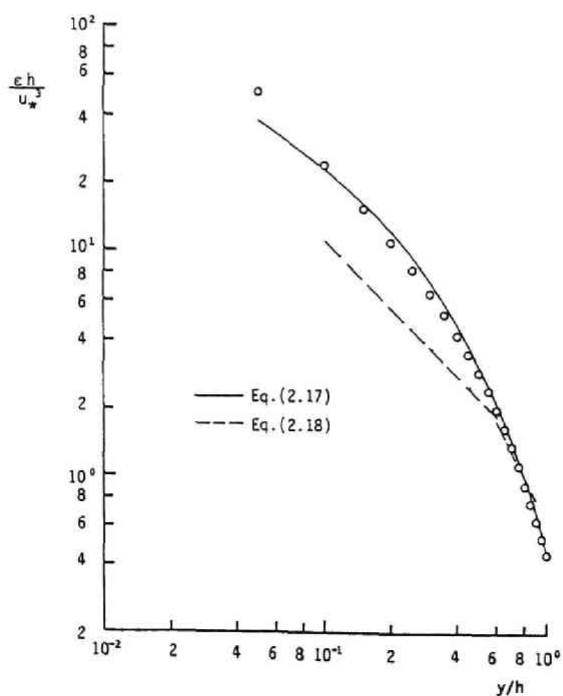


図2.8 ϵ の水深方向分布

2.5 乱流拡散係数の推定

第1編第1章で述べた乱流拡散係数と Euler 的乱れ特性量の関係についての考察によれば、主流方向の scalar flux は次のように表示される。

$$-\overline{uc'} = c_x \frac{\overline{u^2 k}}{\epsilon} \frac{\partial C}{\partial x} = D_x \frac{\partial C}{\partial x}$$

ここに、 C : 時間平均濃度, c' : 濃度変動, c_x : 定数である。

第1編第2章の考察によれば、各方向の乱流拡散係数の比は異方性のパラメータである乱れ強さの比に依存している。そこで、まず乱流拡散係数 D_x を定め、第1編 (2.23) 式

$$\frac{D_i}{D_j} = \frac{\overline{u_i^2}}{\overline{u_j^2}} \cdot \left(0.2 + 0.8 \frac{\overline{u_i^2}}{\overline{u_j^2}}\right) \quad (\text{ただし, } \overline{u_i^2} > \overline{u_j^2}) \quad (2.19)$$

より他の二方向の乱流拡散係数 D_y , D_z を推定してみよう。

D_x に関係する量として $\overline{u^2 k}/\epsilon$ を取り上げ、その分布形を示せば図2.9のようになる。 y/h が0.5まで放物線形で増加し、 $0.5 < y/h < 0.8$ の領域ではほぼ一定の値をとり、 y/h が0.8より自由表面に近づくとき、多少の増加が見られる。自由表面での $(\overline{u^2 k}/\epsilon)/hu_*$ の値は1.0程度であり、Iwasa・Imamoto¹¹⁾ が自由表面上で計測した D_x/hu_* の値は0.5~0.7程度であるので、 c_x の値は0.5~0.7となる。この結果と (2.19) 式を用いて D_y , D_z の分布形を示したのが図2.10(a), (b)である。図2.10(a)には放物線分布

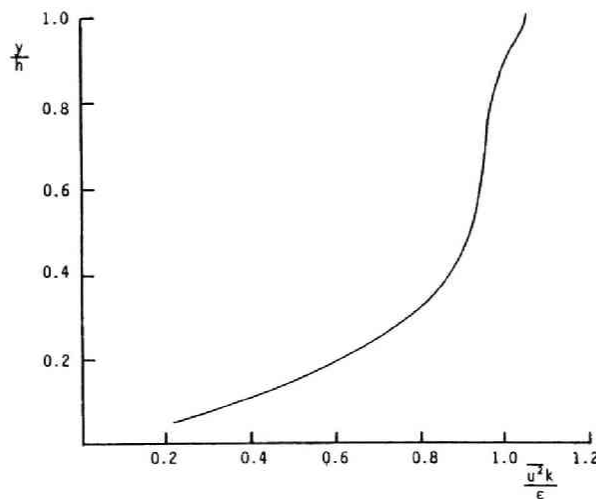


図2.9 $\overline{u^2 k}/\epsilon$ の分布

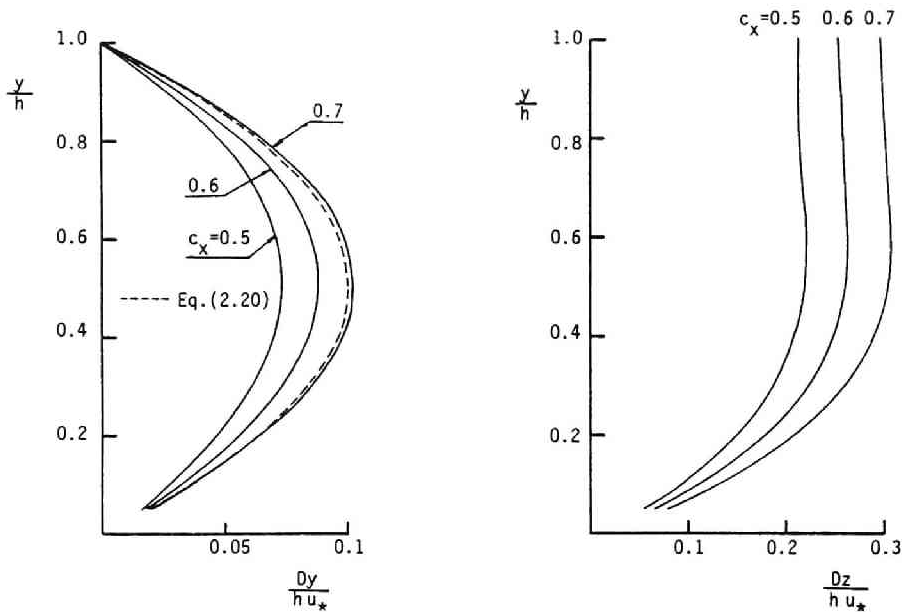


図2.10 D_y/hu_* , D_z/hu_* の水深方向分布

$$\frac{D_y}{hu_*} = c_x \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (2.20)$$

も示してある。 D_y/hu_* については、 $c_x = 0.7$ としたとき放物線分布とよく適合している。また、 D_z/hu_* については、 $c_x = 0.5$ としたとき自由表面において $D_z/hu_* \doteq 0.2$ であり、かつ D_z/hu_* の水深平均値は0.181となり、第1編で述べた従来の実験結果とほぼ適合している。このように、 $c_x = 0.5 \sim 0.7$ 程度とすれば、応力モデルによる乱れ特性量の計算結果と、第1編第2章で述べた乱流拡散係数と Euler 的乱れ特性量の関係を用いて、 D_x , D_y , D_z の値を推定できる。ただし、本章で用いたモデルでは、第1編第3章で示したような乱流拡散係数と U/u_* , Reynolds 数等との関係が再現できず、より高精度のモデルの構成を検討する必要性も示唆される。

2.6 結語

本章では、応力モデルを用いて開水路流れの乱れ特性量を推定し、得られた結果より空間の三方向の乱流拡散係数を推定する方法について検討した。得られた結果は次のようである。

- ① Launder・Reece・Rodi が提案している応力モデルを用いて、開水路流れの流速分布と乱れ特性量の推定を試みた。その際、 $p-s$ 項への自由表面の影響を考慮する方法として、 $p-s$ 項に減衰関数を乗じる方法を用いた。得られた計算結果は、流速分布に関しては対数則をよく再現し、乱れ特性量に関しては、柵津、浅野が示している実験結果を概ね再現できた。

- ② 得られた乱れ特性量の計算結果と、第1編第1, 2章で検討した乱流拡散係数と Euler 的乱れ特性量の関係を用いて、次のような空間の3方向の乱流拡散係数の表示を得た。

$$D_x = c_x \frac{\overline{u^2 k}}{\epsilon} \quad (c_x = 0.5 \sim 0.7)$$

$$D_y = \frac{\overline{v^2}}{u^2} \cdot \frac{D_x}{(0.2 + 0.8 \overline{u^2 / v^2})}$$

$$D_z = \frac{\overline{w^2}}{u^2} \cdot \frac{D_x}{(0.2 + 0.8 \overline{u^2 / w^2})}$$

参考文献

- 1) 細田 尚, 余越正一郎: 応力モデルによる開水路流れの乱れ特性量の推定について, 土木学会論文集, 第393号/Ⅱ-9 (ノート), pp. 221-224, 1988.
- 2) Launder, B. E., Reece, G. J. and Rodi, W. : Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure, J. Fluid Mech., Vol. 68, pp. 537-566, 1975.
- 3) Gibson, M. M. and Rodi, W. : Simulation of free effects on turbulence with a Reynolds stress model, J. Hydraulics Res., Vol. 27, No. 2, pp. 233-244, 1989.
- 4) Gibson, M. M. and Launder, B. E. : Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer, J. Fluid Mech., Vol. 86, pp. 491-511, 1978.
- 5) Champagne, F. H., Hariss, V. G. and Corrsin, S. : Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow, J. Fluid Mech., Vol. 41, pp. 81-139, 1970.
- 6) 柁津家久: 開水路流れの乱流構造に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 1977.
- 7) Nezu, I. and Rodi, W. : Open-Channel flow measurements with a Laser Doppler anemometer, J. Hydraulics Eng., ASCE, Vol. 112, No. 5, pp. 335-355, 1986.
- 8) 今本博健, 石垣泰輔: LDV による開水路流れの速度ベクトル計測について (1), 京都大学防災研究所年報 第28号 B2, pp. 471-486, 1985.
- 9) Rodi, W. : Recent development in turbulence modelling, Proc. 3rd Int'l Symp. Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, IAHR, Tokyo, pp. K01-15, 1988.
- 10) 浅野富夫: 開水路流れにおける乱れの時空間構造に関する研究, 京都大学学位論文, 1980.
- 11) Iwasa, Y. and Imamoto, H. : Dispersive characteristics of free surface flow in term of Lagrangian descriptions, Proc. 13th Congress of IAHR, Kyoto, A14, pp. 109-118, 1969.

第3章 Surface Jet に関する解析

本章では、Surface Jet 中の水温分布あるいは密度分布の拡散過程の検討をする前に、周囲流体と同一の密度で放出される surface jet の解析を試みる。まず、水理量の分布形の相似性が仮定できる領域 (the zone of established flow) での基礎式の基本的特性を検討することにより、噴流に対しての乱流モデルの適用性を検証する。

3.1 $k-\epsilon$ モデルの基本的特性^{1,2)}

(1) 二次元 Jet

図3.1に示すような二次元 jet を考える。乱れ Reynolds 数が十分に大きく、また、水理量の x 方向の変化が y 方向に比べて十分小さい領域を考えると、 $k-\epsilon$ モデルの基礎式は次のようになる。

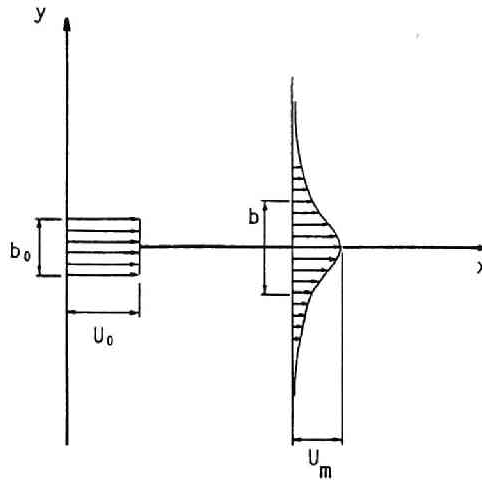


図3.1 二次元 Jet の座標系

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}) \quad (3.2)$$

$$-\overline{u'v'} = D \frac{\partial U}{\partial y} \quad \left(D = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \right) \quad (3.3)$$

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \epsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{D}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) \quad (3.4)$$

$$U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = c_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{D}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \quad (3.5)$$

ここに、 U , V : 時間平均流速ベクトルの x , y 方向成分, u' , v' : 乱れ速度ベクトルの x , y 方向成分, k : 乱れエネルギー, ϵ : 乱れエネルギー散逸率, c_μ , c_{ϵ_1} , c_{ϵ_2} , σ_k , σ_ϵ : モデル定数。(以後, 簡単のため変動量を表す' を省略する。)

放出口より下流の水理量の相似性が仮定できる領域では, U , k , ϵ は次のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} U &= U_m f(\eta) \\ k &= k_m g(\eta) \\ \epsilon &= \epsilon_m h(\eta) \\ U_m &\propto U_0 \xi^\rho, \quad b \propto b_0 \xi^q, \quad k_m \propto k_0 \xi^r, \quad \epsilon_m \propto \epsilon_0 \xi^s \\ \xi &= x/b_0, \quad \eta = y/b \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

ここに, U_0 , k_0 , ϵ_0 : 放出口の U , k , ϵ の値, U_m , k_m , ϵ_m : 噴流中心軸上の U , k , ϵ の値, b_0 , b : 各々放出口の幅と流速の値が $U_m/2$ となる幅である。

(3.6) 式を連続式 (3.1) に代入すれば

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -f \frac{dU_m}{dx} + \frac{U_m f'}{b} \frac{db}{dx} \eta \quad (3.7)$$

となる。' は η に関する微分を表す。これより, V は次のように表せる。

$$V(y) = U_m \frac{db}{dx} [\eta f(\eta) - \int_0^\eta f(\eta') d\eta'] - b \frac{dU_m}{dx} \int_0^\eta f(\eta') d\eta'$$

これを用いて, 運動方程式の x 方向成分 (3.2) 式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{U_0^2}{b_0} \xi^{2\rho-1} \{ p[f(\eta)^2 - f'(\eta) \int_0^\eta f(\eta) d\eta] - q f'(\eta) \int_0^\eta f(\eta) d\eta \} \\ = c_\mu \frac{k_0^2}{b_0^2 \epsilon_0} \xi^{\rho-2q+2r-s} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{g(\eta)^2}{h(\eta)} f'(\eta) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

ここに

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} &= U_m f(\eta) \left[\frac{dU_m}{dx} f(\eta) - U_m f'(\eta) \frac{\eta}{b} \frac{db}{dx} \right] \\ &= \frac{U_0^2}{b_0} \xi^{2\rho-1} [p f(\eta)^2 - q \eta f(\eta) f'(\eta)] \\ V \frac{\partial U}{\partial y} &= \left\{ -b \frac{dU_m}{dx} \int_0^\eta f(\eta) d\eta + U_m \frac{db}{dx} [\eta f(\eta) - \int_0^\eta f(\eta) d\eta] \right\} \frac{U_m}{b} f'(\eta) \\ &= \frac{U_0^2}{b_0} \xi^{2\rho-1} \{ -p f'(\eta) \int_0^\eta f(\eta) d\eta + q f'(\eta) [\eta f(\eta) - \int_0^\eta f(\eta) d\eta] \} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = c_\mu \frac{k_0^2}{b_0^2 \epsilon_0} \xi^{p-2q+2r-s} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{g(\eta)^2}{h(\eta)} f'(\eta) \right]$$

を用いている。

(3.8) 式の ξ のべき指数を比較することにより

$$p+2q+s-2r=1 \quad (3.9)$$

が得られる。

次に、乱れエネルギーの関係式 (k -方程式) (3.4) を η に関して 0 から ∞ まで積分する。

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty U k dy = \int_0^\infty D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 dy - \int_0^\infty \epsilon dy \quad (3.10)$$

(3.6) 式を上式に代入することにより次式が得られる。

$$\begin{aligned} U_0 k_0 (p+q+r) \xi^{p+q+r-1} \int_0^\infty f(\eta) g(\eta) d\eta \\ = c_\mu \frac{k_0^2 U_0^2}{\epsilon_0 b_0} \xi^{2p-q+2r-s} \int_0^\infty \frac{g(\eta)^2}{h(\eta)} f'(\eta)^2 d\eta - \epsilon_0 b_0 \xi^{q+s} \int_0^\infty h(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (3.11)$$

ξ のべき指数を比較することにより次式が得られる。

$$\begin{aligned} p+r-s &= 1 \\ p-q+r-s &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

乱れエネルギー散逸率の関係式 (ϵ -方程式) (3.5) を積分することによっても (3.12) 式が得られる。

最後に、運動量 flux の保存を表す次式より p , q , r , s の連立方程式が構成される。

$$2p+q=0 \quad (3.13)$$

これらを解くことにより U_m , b , k_m , ϵ_m に関する減衰法則

$$\left. \begin{aligned} U_m &\propto x^{-\frac{1}{2}} \\ b &\propto x^1 \\ k_m &\propto x^{-1} \\ \epsilon_m &\propto x^{-\frac{5}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

が得られる。 U_m , b の減衰法則は従来より確められている結果³⁾と一致するとともに、 k , ϵ に関する減衰法則が得られたことになる。

渦動粘性係数を用いて定義した Reynolds 数

$$Re_D = \frac{U_m b}{\frac{k_m^2}{c_\mu \epsilon_m}}$$

に (3.14) 式を代入すれば, Re_D は一定値となることがわかる。

最近, 福嶋⁴⁾は同様の方法により相似分布形を計算している。

(2) Round Jet

図3.2に示す座標系を用いて (3.1)~(3.5) 式に対応する基礎式系は次のようになる。

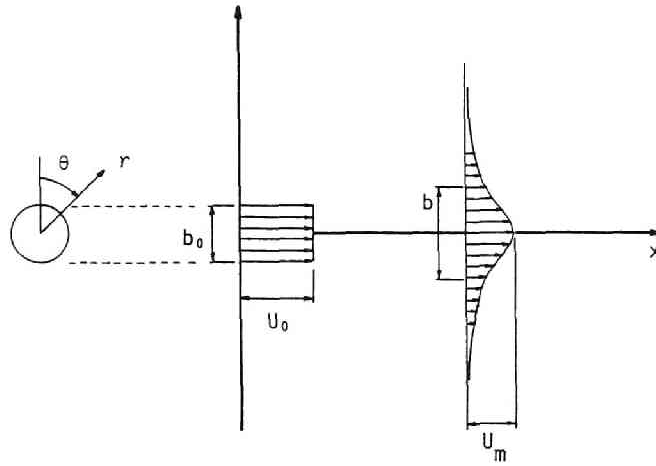


図3.2 Round Jet の座標系

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r U_r) = 0 \quad (3.15)$$

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(-r \overline{u_x u_r}) \quad (3.16)$$

$$-\overline{u_x u_r} = D \frac{\partial U_x}{\partial r} \quad (3.17)$$

$$U_x \frac{\partial k}{\partial x} + U_r \frac{\partial k}{\partial r} = D \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2 - \epsilon + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{D}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \quad (3.18)$$

$$U_x \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + U_r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} = c_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} D \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2 - c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{D}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) \quad (3.19)$$

ここに, U_x , U_r : 時間平均流速ベクトルの x , r 成分, u_x' , u_r' : 変動流速ベクトルの x , r 成分。

平面 Jet の場合と同様に水理量の分布形の相似性を次のように仮定する。

$$\left.
\begin{aligned}
U_x &= U_m f(\eta) \\
k &= k_m g(\eta) \\
\epsilon &= \epsilon_m h(\eta) \\
U_m &\propto U_0 \xi^p, \quad b \propto b_0 \xi^q, \quad k_m \propto k_0 \xi^r, \quad \epsilon_m \propto \epsilon_0 \xi^s \\
\xi &= x/b_0, \quad \eta = r/b
\end{aligned}
\right\} \quad (3.20)$$

U_r は次のように表される。

$$U_r = U_m \frac{db}{dx} \eta f - \frac{1}{b\eta} \frac{d(U_m b^2)}{dx} \int_0^\eta \eta f d\eta \quad (3.21)$$

上式を用いて (3.16) 式に (3.20) 式を代入することにより

$$\begin{aligned}
\frac{U_0^2}{b_0} \xi^{2p-1} [p f(\eta)^2 - (p+2q) \frac{f'(\eta)}{\eta} \int_0^\eta \eta f(\eta) d\eta] \\
= c_\mu \frac{k_0^2 U_0}{b_0^2 \epsilon_0} \xi^{p-2q+2r-s} \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{g(\eta)^2}{h(\eta)} f'(\eta) \right]
\end{aligned} \quad (3.22)$$

が得られる。ここに、次式を用いている。

$$\begin{aligned}
U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} &= U_0 \xi^p f(\eta) \left[p U_0 \xi^{p-1} \frac{f(\eta)}{b_0} - U_0 \xi^p f'(\eta) \frac{r}{b^2} \frac{db}{dx} \right] \\
&= \frac{U_0^2}{b_0} \xi^{2p-1} [p f(\eta) - q \eta f(\eta) f'(\eta)] \\
U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} &= \left[-\frac{1}{\eta b} \frac{d}{dx} (U_m b^2) \int_0^\infty \eta f(\eta) d\eta + U_m \frac{db}{dx} \eta f(\eta) \right] \frac{U_0 \xi^p f'(\eta)}{b} \\
&= \frac{U_0^2}{b_0} \xi^{2p-1} \left[-(p+2q) \frac{f'(\eta)}{\eta} \int_0^\infty \eta f(\eta) d\eta + q \eta f'(\eta) f(\eta) \right] \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) &= c_\mu \frac{k_0^2 U_0}{b_0^2 \epsilon_0} \xi^{p-2q+2r-s} \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{g(\eta)^2}{h(\eta)} f'(\eta) \right]
\end{aligned}$$

(3.22) 式の ξ に関するべき指数を比較することにより

$$p+2q-2r+s=1 \quad (3.23)$$

が得られる。

一方、 k -方程式 (3.18) に r を乗じた後 r に関し 0 から無限大まで積分すれば

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty r U_x k dr = \int_0^\infty r D \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2 dr - \int_0^\infty r \epsilon dr \quad (3.24)$$

を得る。ただし、この誘導過程で

$$rU_x \frac{\partial k}{\partial x} + rU_r \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}(rU_x k) + \frac{\partial}{\partial r}(rU_r k)$$

を用いている。

(3.24) 式に (3.20) 式を代入することにより、次式が得られる。

$$\begin{aligned} b_0 U_0 k_0 (p+2q+r) \xi^{\rho+2q+r-1} \int_0^\infty \eta f(\eta) g(\eta) d\eta \\ = c_\mu \frac{k_0^2 U_0^2}{\epsilon_0} \xi^{2\rho+2r-s} \int_0^\infty \eta \frac{g(\eta)^2}{h(\eta)} f'(\eta)^2 d\eta - b_0^2 \epsilon_0 \xi^{2q+s} \int_0^\infty \eta h(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (3.25)$$

ξ のべき指数を比較することにより

$$\left. \begin{aligned} p-2q+r-s &= -1 \\ p+r-s &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

が得られる。

最後に運動量 flux の保存を表す

$$p+q=0 \quad (3.27)$$

により p, q, r, s の連立方程式が得られ、その解より U_m, b, k_m, ϵ_m の減衰法則が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} U_m &\propto x^{-1} \\ b &\propto x^1 \\ k_m &\propto x^{-2} \\ \epsilon_m &\propto x^{-4} \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

さらに、二次元 Jet の場合と同様に、渦動粘性係数で定義した Reynolds 数 Re_D に (3.28) 式を代入すれば $Re_D = \text{一定}$ となる。

表3.1 水理量の減衰率

	slot	round
U_m	-1/2	-1
b	1	1
k_m	-1	-2
ϵ_m	-5/2	-4
Re_D	0	0

本章で得られた水理諸量の減衰のべき指数を表3.1に示す。 U_m , b に関しては従来より確かめられている値に一致する³⁾。乱れ強さに関しても $\sqrt{u_i'^2}/U_m$ の値は x の増加とともにほぼ一定値をとるようであり³⁾，本研究の結果の $\sqrt{k_m}/U_x \propto x^0$ と対応している。

3.2 Surface Jet に関する数値解析

3.1において，水理量の分布形の相似性が仮定できる領域での $k-\epsilon$ モデルの基本的特性を検討した。その結果をふまえ，本節では，Surface Jet を鉛直二次元流れとして数値解析し，水理量の流れ方向の減衰特性，鉛直分布形について検討する。

(1) 基礎式

基礎式は前節との対応より $k-\epsilon$ モデルを用いる。 $k-\epsilon$ モデルとして1章で述べた乱れ Reynolds 数の低い領域を考慮した Jones・Launder モデルを用いれば基礎式は次のようになる。ただし，計算の対象領域と座標系を図3.3に示した。また，運動方程式の鉛直方向成分には静水圧分布を仮定している。

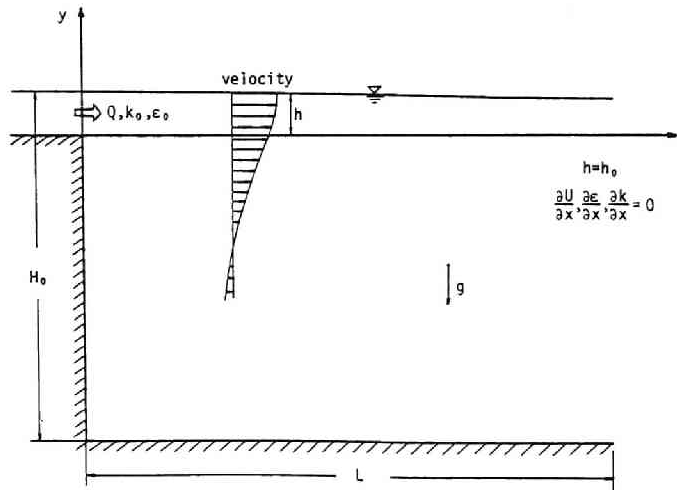


図3.3 流れの場の概要と座標系

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{u^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{uv}) \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = & -\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{D}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{D}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] \\ & - \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = & c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{D}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{D}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + 2\nu D \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$-\overline{u^2}$ は次章の Buoyant Surface Jet の解析との対応を考えて、

$$\frac{-\overline{u^2}}{k} = -0.94$$

とし、 $-\overline{uv}$ は

$$-\overline{uv} = D \frac{\partial U}{\partial y}, \quad D = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

である。 c_μ , $c_{\epsilon 2}$ は (1.34a), (1.39) 式を用いている。上式で現れる定数を表2.2に示した。

表3.2 モデル定数

$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2\infty}$	$c_{\mu\infty}$	σ_k	σ_ϵ
1.44	1.92	0.09	1.0	1.3

(2) 解析法と境界条件

解析法は岩佐・松尾・兪⁵⁾が貯水池の水温・濁度予測に用いている explicit 法を用いる。従って変数の配置は図3.4のようになる。

計算の境界条件は従来^{1,2)}と同様であり、図3.3に示したように放出口で流量 Q , $k = k_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ を与え、計算上の下流端で水位一定, U , k , ϵ については $\partial/\partial x = 0$ とした。また、自由表面では U , k , ϵ について簡単に $\partial/\partial y = 0$ とした。

路床での境界条件は次のようである。 t , x , y に関する離散化のステップ数を各々 n , i , j で表す。路床に接する格子では $j = 1$ とする (図3.5参照)。 $U_{i,1}^n$ が既知の時、対数則

$$\frac{|U_{i,1}^n|}{|u_{*i}^n|} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{|u_{*i}^n|(\Delta y/2)}{\nu} + A_s \quad (\kappa = 0.4, A_s = 5.5)$$

より $|u_{*i}^n|$ を逆算する。 $|u_{*i}^n|(\Delta y/2)/\nu$ が基準値 Re_* より大きければこの u_{*i}^n を用いる。ただし、

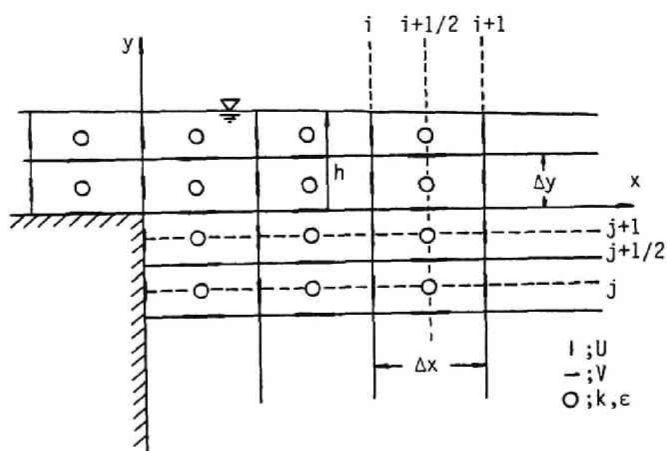


図3.4 水理量の配置

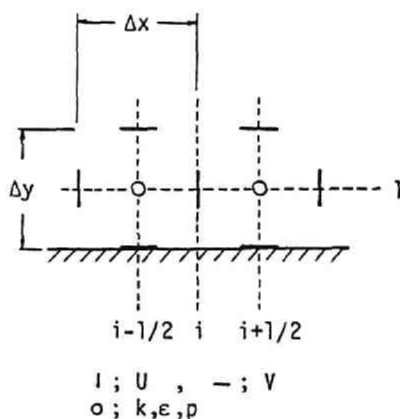


図3.5 路床に接する格子

u_{*i}^n は $U_{i,1}^n$ の正・負に応じて $u_{*i}^n = |u_{*i}^n|$ または $u_{*i}^n = -|u_{*i}^n|$ である。一方、 $|u_{*i}^n|(\Delta y/2)/\nu < Re_*$ のときには対数則を用いずに u_{*i}^n を次式で求め直す。

$$u_{*i}^n |u_{*i}^n| = \nu \frac{U_{i,1}^n - 0}{(\Delta y/2)}$$

次に、 $u_{*i+1/2}^n = (u_{*i+1}^n + u_{*i}^n)/2$ を用いて $|u_{*i+1/2}^n|(\Delta y/2)/\nu > Re_*$ ならば $k_{i+1/2,1}^{n+1/2}$, $\epsilon_{i+1/2,1}^{n+1/2}$ を次式の wall function 法で求める。

$$k_{i+1/2,1}^{n+1/2} = \frac{(u_{*i+1/2}^n)^2}{\sqrt{c_{\mu\omega}}}, \quad \epsilon_{i+1/2,1}^{n+1/2} = \frac{|(u_{*i+1/2}^n)^3|}{x(\Delta y/2)}$$

$|u_{\star i+1/2}^n|(\Delta y/2)/\nu < Re_{\star}$ ならば wall function 法でなく次式を用いる。

$$\begin{aligned}
& \frac{k_{i+1/2,1}^{n+1/2} - k_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{k_{i+1/2+a,1}^{n-1/2} U_{i+1,1}^n - k_{i-1/2+b,1}^{n-1/2} U_{i,1}^n}{\Delta x} + \frac{k_{i+1/2,1+c}^{n-1/2} V_{i+1/2,2}^n}{\Delta y} \\
&= D_{i+1/2,1}^{n-1/2} \left(\frac{U_{i+1/2,2}^n - U_{i+1/2,1}^n}{\Delta y} \right)^2 + \frac{D_{i,1}^{n-1/2} (k_{i+3/2,1}^{n-1/2} - k_{i+1/2,1}^{n-1/2}) - D_{i-1,1}^{n-1/2} (k_{i+1/2,1}^{n-1/2} - k_{i-1/2,1}^{n-1/2})}{\sigma_k \Delta x^2} \\
&+ \frac{D_{i+1/2,3/2}^{n-1/2} \frac{k_{i+1/2,2}^{n-1/2} - k_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta y}}{\sigma_k \Delta y} + \nu \frac{\frac{k_{i+1/2,2}^{n-1/2} - k_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta y} \frac{k_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta y/2}}{\Delta y} + \nu \frac{k_{i+3/2,1}^{n-1/2} - 2k_{i+1/2,1}^{n-1/2} + k_{i-1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta x^2} \\
&- \epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2} - 2\nu \left(\frac{\sqrt{k_{i+1/2,2}^{n-1/2}} - \sqrt{k_{i+1/2,1}^{n-1/2}}}{\Delta y} \right)^2 \tag{3.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\epsilon_{i+1/2,1}^{n+1/2} - \epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{\epsilon_{i+1/2+a,1}^{n-1/2} U_{i+1,1}^n - \epsilon_{i-1/2+b,1}^{n-1/2} U_{i,1}^n}{\Delta x} + \frac{\epsilon_{i+1/2,1+c}^{n-1/2} V_{i+1/2,2}^n}{\Delta y} \\
&= c_{\epsilon_1} \frac{\epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{k_{i+1/2,1}^{n-1/2}} D_{i+1/2,1}^{n-1/2} \left(\frac{U_{i+1/2,2}^n - U_{i+1/2,1}^n}{\Delta y} \right)^2 - c_{\epsilon_2} \frac{(\epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2})^2}{k_{i+1/2,1}^{n-1/2}} \\
&+ \frac{D_{i,1}^{n-1/2} (\epsilon_{i+3/2,1}^{n-1/2} - \epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2}) - D_{i-1,1}^{n-1/2} (\epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2} - \epsilon_{i-1/2,1}^{n-1/2})}{\sigma_\epsilon \Delta x^2} + \nu \frac{\epsilon_{i+3/2,1}^{n-1/2} - 2\epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2} + \epsilon_{i-1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta x^2} \\
&+ \frac{D_{i+1/2,3/2}^{n-1/2} \frac{\epsilon_{i+1/2,2}^{n-1/2} - \epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta y}}{\sigma_\epsilon \Delta y} + \nu \frac{\frac{\epsilon_{i+1/2,2}^{n-1/2} - \epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta y} \frac{\epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta y/2}}{\Delta y} \\
&+ 2\nu D_{i+1/2,1}^{n-1/2} \left(\frac{\frac{U_{i+1/2,2}^n - U_{i+1/2,1}^n}{\Delta y} - \frac{U_{i+1/2,1}^n}{\Delta y/2}}{\Delta y} \right)^2 \tag{3.35}
\end{aligned}$$

このように求められた $u_{\star i}^n$, $k_{i+1/2,1}^{n+1/2}$, $\epsilon_{i+1/2,1}^{n+1/2}$ を用いて $U_{i,1}^{n+1}$ を次式で求める。

$$\begin{aligned}
& \frac{U_{i,1}^{n+1} - U_{i,1}^n}{\Delta t} + \frac{U_{i+a,1}^n U_{i+1/2,1}^n - U_{i-1+b,1}^n U_{i-1/2,1}^n}{\Delta x} + \frac{U_{i,1+c}^n V_{i+1/2,2}^n}{\Delta y} \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1/2,1}^n - p_{i-1/2,1}^n}{\Delta x} + \frac{(-\overline{u_{i+1/2,1}^{2n+1/2}}) - (-\overline{u_{i-1/2,1}^{2n+1/2}})}{\Delta x} + \nu \frac{U_{i+1,1}^n - 2U_{i,1}^n + U_{i-1,1}^n}{\Delta x^2} \\
&+ D_{i,3/2}^{n+1/2} \frac{U_{i,2}^n - U_{i,1}^n}{\Delta y^2} + \nu \frac{U_{i,2}^n - U_{i,1}^n}{\Delta y^2} - \frac{\langle u_{\star} | u_{\star} \rangle_i^n}{\Delta y} \tag{3.36}
\end{aligned}$$

上式中, $U_{i+1/2,1}^n = (U_{i+1,1}^n + U_{i,1}^n)/2$, $D_{i,1}^{n-1/2} = (D_{i+1/2,1}^{n-1/2} + D_{i-1/2,1}^{n-1/2})/2$, $D_{i+1/2,3/2}^{n-1/2} = (D_{i+1/2,2}^{n-1/2} + D_{i+1/2,1}^{n-1/2})/2$ 。また, a, b, c は上流差分のパラメータ。基準値 Re_{\star} は50とした。

放出口での流量は図3.6に示すような時間の関数とした。

(3) 基礎式の無次元化と無次元パラメータ

次式で定義される無次元変数を導入する。

$$U' = \frac{U}{U_0}, \quad V' = \frac{V}{U_0}, \quad k' = \frac{k}{k_0}, \quad \epsilon' = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad p' = \frac{p}{\rho g h_0}, \quad \overline{u'^2} = \frac{\overline{u^2}}{k_0},$$

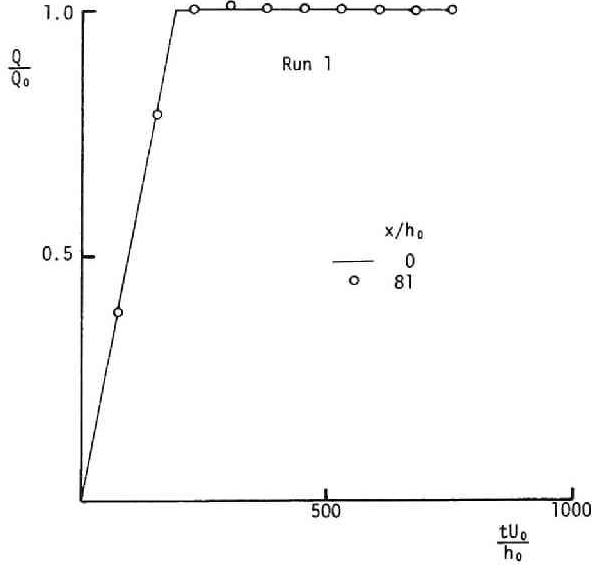


図3.6 定常化過程

$$x' = \frac{x}{h_0}, \quad y' = \frac{y}{h_0}, \quad t' = \frac{tU_0}{h_0}$$

このとき、基礎式系 (3.29)~(3.33) は次のように書き換えられる。ただし以下の式では無次元変数を示す' は省略している。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = & -\frac{1}{F_{r_0}^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \beta \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + \frac{\beta^2}{\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ & + \frac{1}{Re_0} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$p = \frac{h}{h_0} - y \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = & \frac{\beta}{\alpha} D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\beta^2}{\alpha} \frac{D}{\sigma_k} + \frac{1}{Re_0} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\beta^2}{\alpha} \frac{D}{\sigma_k} + \frac{1}{Re_0} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] - \frac{\alpha}{\beta} \epsilon - \frac{2}{Re_0} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = & \frac{\beta}{\alpha} c_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\beta^2}{\alpha} \frac{D}{\sigma_\epsilon} + \frac{1}{Re_0} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\beta^2}{\alpha} \frac{D}{\sigma_\epsilon} + \frac{1}{Re_0} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] - \frac{\alpha}{\beta} c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} + 2 \frac{\beta^2}{Re_0 \alpha^2} D \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

ここに、 α , β , Fr_0 , Re_0 は次式で定義される無次元パラメータである。

$$\alpha = \frac{\epsilon_0 h_0}{U_0^3}, \quad \beta = \frac{k_0}{U_0^2}, \quad Fr_0 = \frac{U_0}{\sqrt{gh_0}}, \quad Re_0 = \frac{U_0 h_0}{\nu}$$

(4) 計算結果の考察

本項では実験式、図の記号を明瞭にするため、無次元変数には再び'をつける。

計算に用いた無次元パラメータを表3.3に示す。これには(3)で示した α , β , Fr_0 , Re_0 の他に、幾何学的パラメータ H/h_0 , L/H も示してある。

表3.3 計算の諸条件

	α	β	Fr_0	Re	H_0/h_0	L/H_0
Run 1	0.001	0.01	0.3	7512	30	81
Run 2	0.001	0.02	0.3	7512	30	81
Run 3	0.001	0.03	0.3	7512	30	81
Run 4	0.001	0.02	0.3	939	30	81
Run 5	0.001	0.02	0.3	60096	30	81

まず、Run 1 での下流端流量の経時変化を図3.6に示している。著者等の以前の計算^{1,2)}でみられたような振動は示さず、時間とともに一定値となっている。定常状態とみなしうるときの、表層での流速の x 方向成分 U_s , 乱れエネルギー k_s , 乱れエネルギー散逸率 ϵ_s , 流速の x 方向成分が $U_s/2$ となる幅 b の x 方向への変化過程を、各々図3.7, 図3.8, 図3.9, 図3.10に示した。

各々の図で、上は α , Fr_0 , Re_0 を一定とし β を変化させた場合 (Run 1, 2, 3) であり、下は α , β , Fr_0 を一定とし、 Re_0 を変化させた場合である。

U_s/U_0 と x/h_0 の関係を示した図3.7には実験式³⁾

$$\frac{U_s}{U_0} = \frac{3.5}{\sqrt{x/h_0}} \quad (3.42)$$

も示してある。計算結果は x/h_0 の増加とともに、概ね (3.42) 式に漸近して行くようである。また、図3.7(a)を見ると、 β の値の大きいほど U_s/U_0 の値は小さくなっている。これは (3.38) 式右辺第3項に掛る係数 β^2/α の効果と、 D' に掛る c_μ の関数 (1.34) 式の効果と考えられる。すなわち、乱れ Reynolds 数 (Re_T) は無次元変数と無次元パラメータを用いて

$$Re_T = Re_0 \cdot \frac{\beta^2}{\alpha} \cdot \frac{k'^2}{\epsilon'} \quad (3.43)$$

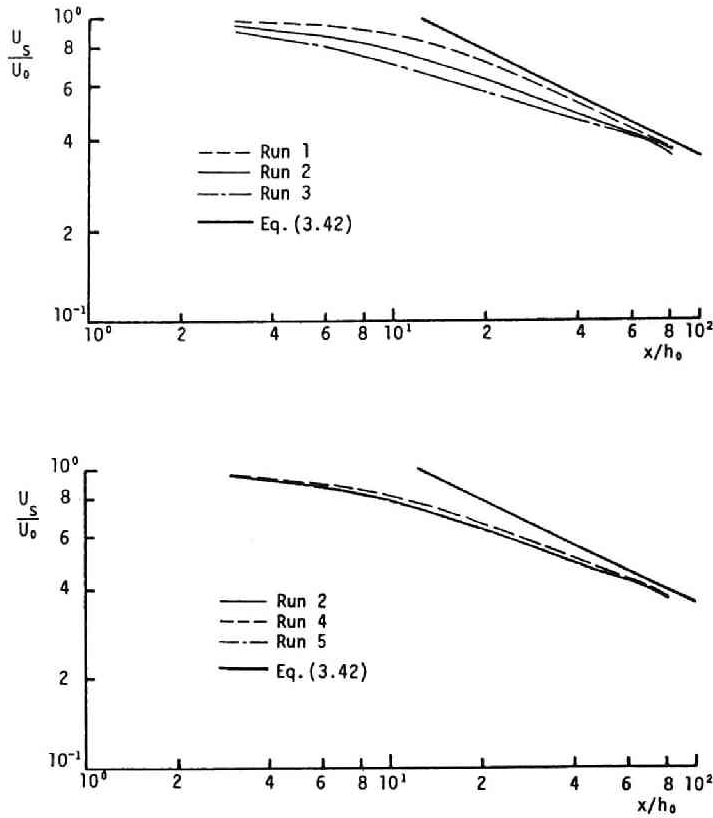


図3.7 表層流速の減衰過程

となるので、 β が大きいほど c_μ の値が大きくなる。

一方、 Re_0 を変化させた Run 2, 4, 5 の結果を示す図3.7下をみると、 Re_0 が大きいほど、 U_s/U_0 は小さい値をとる。これは、(3.43) 式より Re_0 が大きいほど Re_T が大きい値をとり、 c_μ の値が大きくなるためと考えられる。

U_s/D_0 と同様に k_s/k_0 、 ϵ_s/ϵ_0 と x/h_0 との関係を示したのが図3.8, 3.9である。 k_s 、 ϵ_s とともに x/h_0 の小さい領域では β の大きいほど、また Re_0 の大きいほど大きな値を示すが、 x/h_0 が大きくなるにつれ値は逆転する。これは、放出口付近では (3.40), (3.41) 式中の生成項 (右辺第1項) と散逸項 (右辺第4項) の収支により、パラメータの違いによる k 、 ϵ の値の大小が決まるためと考えられる。すなわち、 β 、 Re_0 が大きいほど生成項の値が大きくなり、 k_s 、 ϵ_s も大きくなる。しかし、 x/h_0 が大きくなるにつれて拡散項 (右辺第2, 3項) が卓越し、係数 β^2/α や D の効果により β 、 Re_0 が大きいほど k_s 、 ϵ_s は小さくなる。

図3.8, 3.9には、 x/h_0 が大きくなると3.1で述べた減衰法則 (3.14) 式に従う領域が見られる。

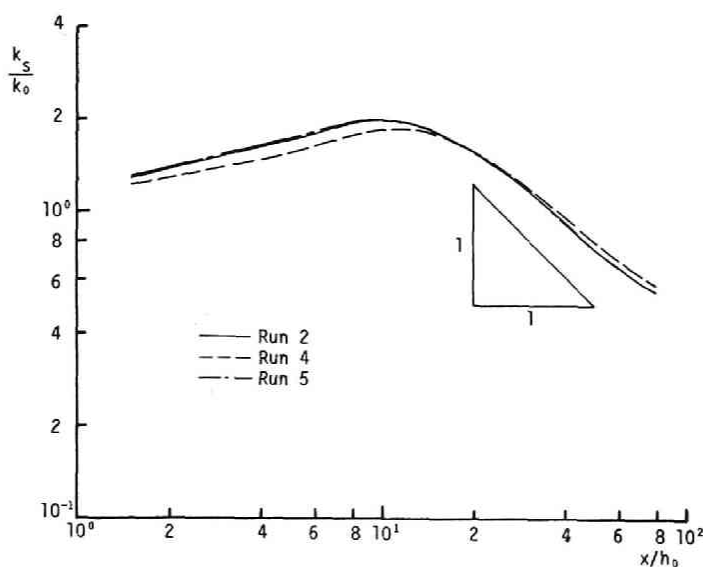
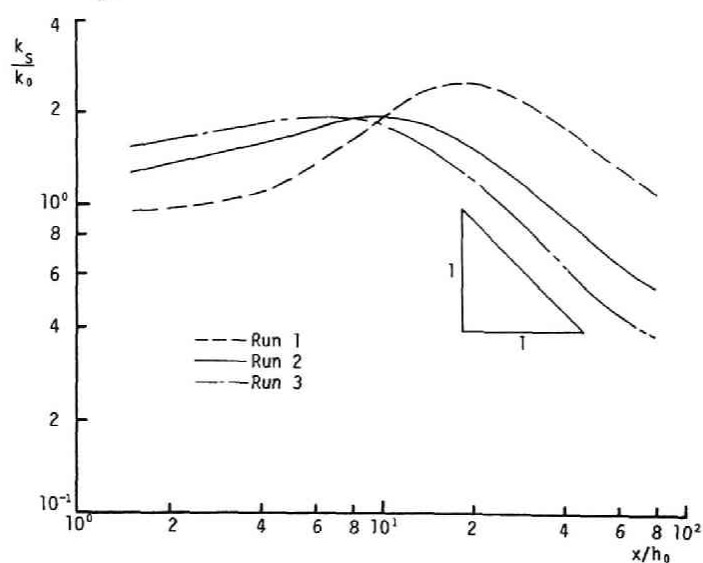


図3.8 表層の乱れエネルギーの減衰過程

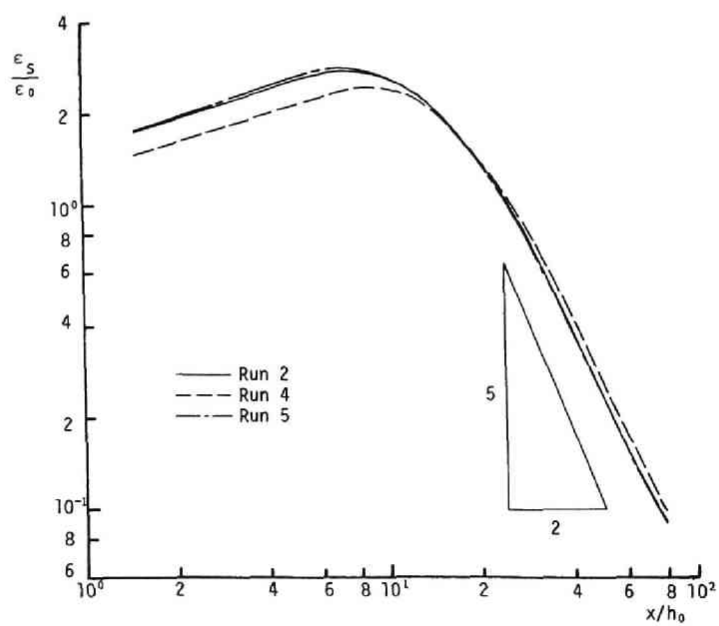
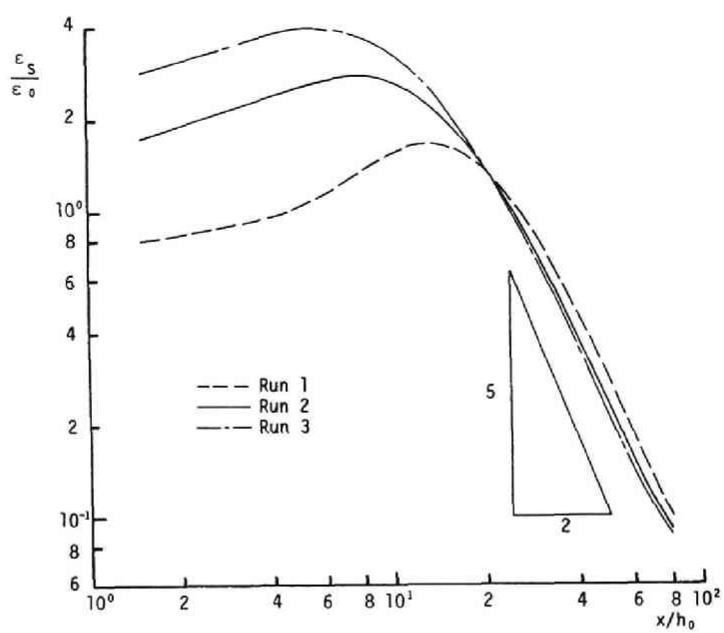


図3.9 表層の乱れエネルギー散逸率の減衰過程

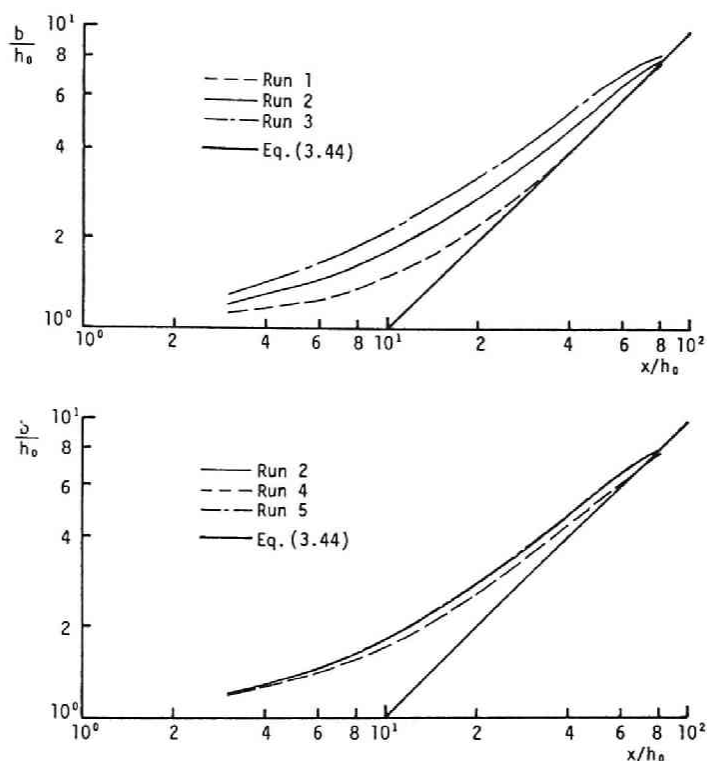


図3.10 Jetの拡がり幅の変化過程

図3.10には U の値が $U_0/2$ となる分布形の幅 b と x/h_0 の関係を示した。図中には実験式³⁾

$$\frac{b}{h_0} = 0.1 \frac{x}{h_0} \quad (3.44)$$

も示してある。計算結果は x/h_0 の増加とともに (3.44) 式に漸近する傾向を示している。

次に、図3.11、図3.12、図3.13、図3.14に各々 U/U_0 , k/k_0 , ϵ/ϵ_0 , $D\epsilon_0/k_0^2$ の鉛直分布を示した。図3.11の U/U_0 の分布形を見ると、放出口付近の $x/h_0 = 9$ では鉛直下方に行くにつれ U/U_0 は負の極小値をとり一定の逆流流速に漸近することがわかる。 $x/h_0 = 30$ では Gauss 分布形を示し、滑らかに減少している。

図3.12～3.14の k , ϵ , D の分布は、いずれも鉛直下方に行くにつれて一度極大値をとり 0 に減衰して行く。 k , ϵ では、放出口付近ではかなり鋭い peak をもった分布形となっているが、流下とともに滑らかになっている。

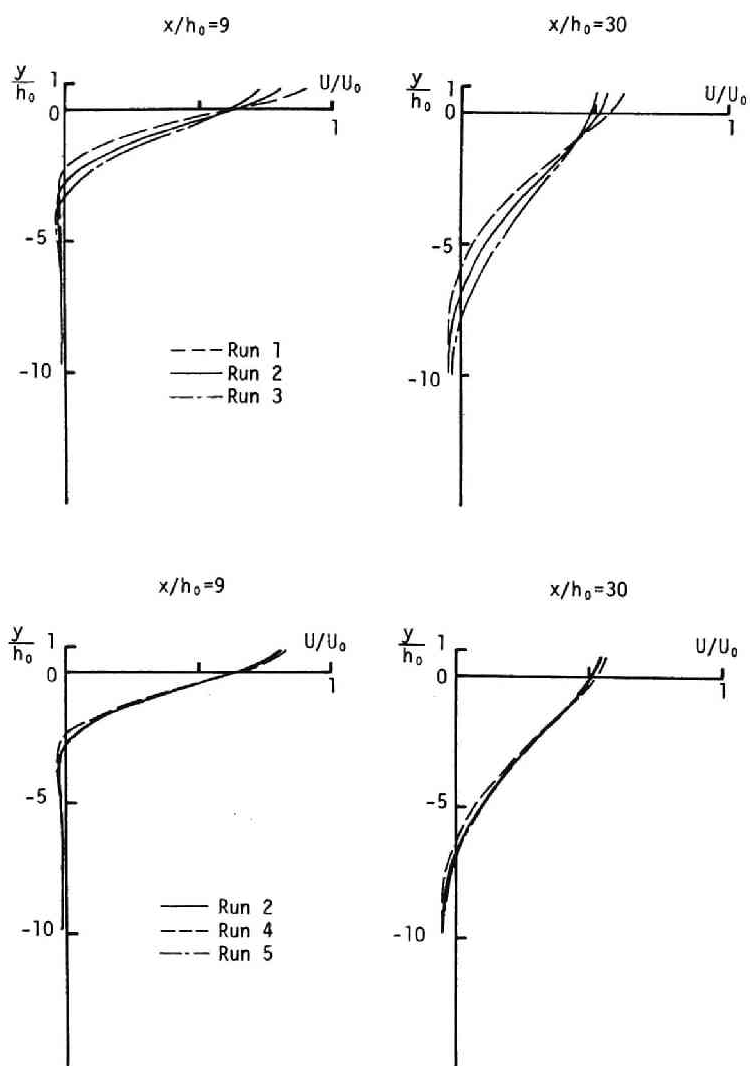


图3.11 流速分布

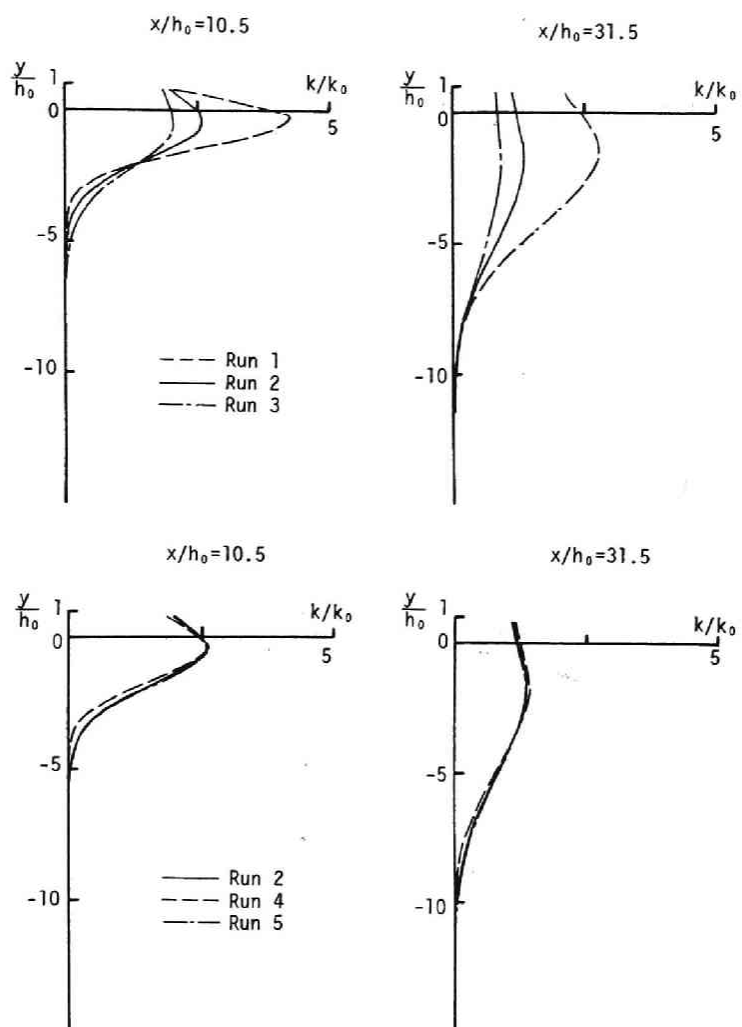


図3.12 乱れエネルギーの分布

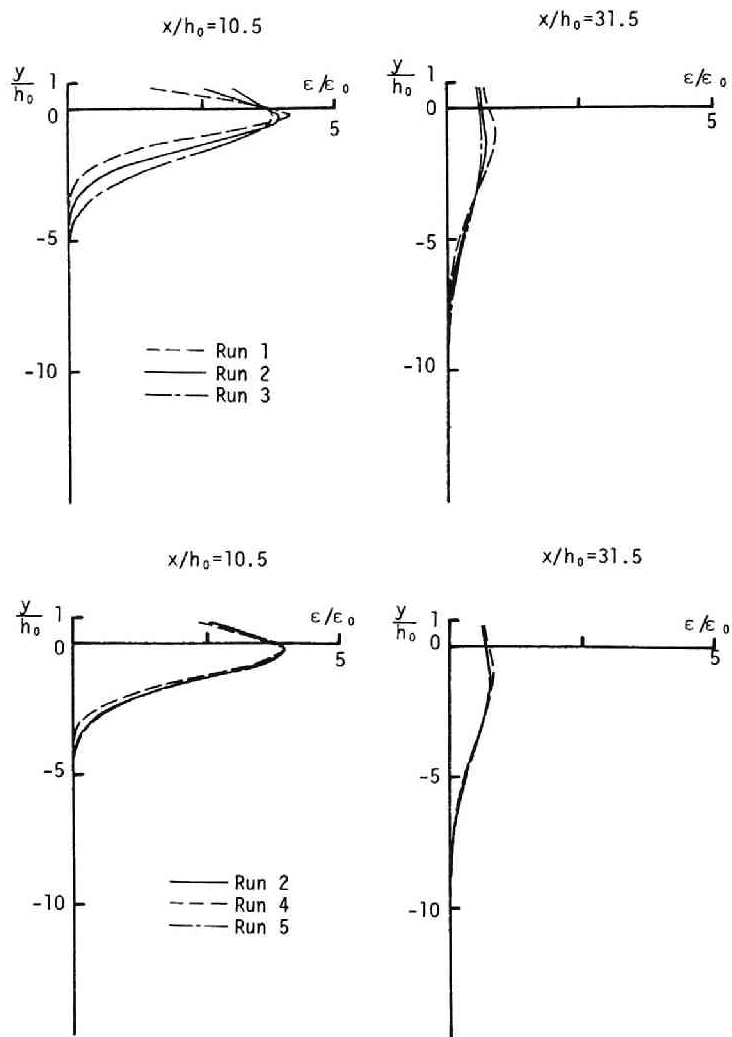


図3.13 乱れエネルギー散逸率の分布

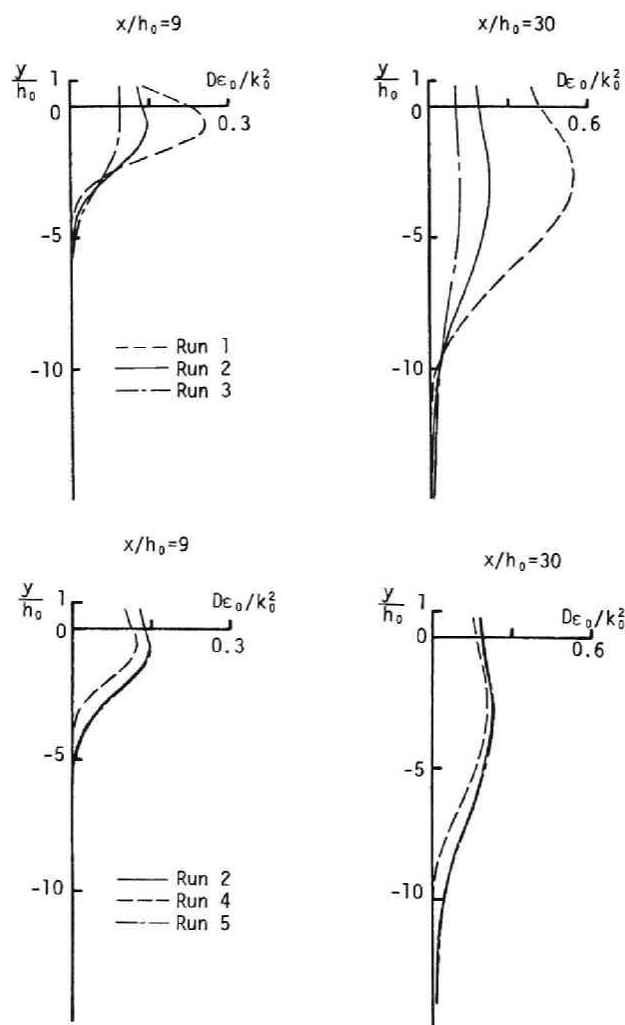


図3.14 渦動粘性係数の分布

3.3 結語

本章では, turbulent jet に対して $k-\epsilon$ モデルの適用性を示した後に, surface jet への適用例を示した。得られた結果を要約すると次のようになる。

- ① $k-\epsilon$ モデルを turbulent jet に適用することの有効性を示すため, 水理量の分布形の相似性が仮定できる領域での jet の中心軸に沿う U_m , k_m , ϵ_m と流速分布の幅 b の減衰過程を検討した。得られた結果は従来の実験結果と定性的に一致する。
- ② この知見をもとに, 周囲流体と同一の密度をもって放出される surface jet の数値解析を行った。その際, 放出口の水理量に関する無次元パラメータ

$$\alpha = \frac{\epsilon_0 h_0}{U_0^3}, \quad \beta = \frac{k_0}{U_0^2}, \quad Fr_0 = \frac{U_0}{\sqrt{gh_0}}, \quad Re_0 = \frac{U_0 h}{\nu}$$

を導入し, その値を変化させて計算した。計算結果は, U_m , b に関しては, 放出口からの距離の増加に伴い従来の二次元 jet に関する実験結果に漸近する傾向を示し, k_m , ϵ_m は (3.14) 式に示したべきで減少する。また, k , ϵ は一度増加し, 極大値をとってから減少する分布形が得られた。渦動粘性係数の分布形も同様である。

参考文献

- 1) Hosoda, T., Iwasa, Y. and Yokosi, S. : Hydraulic analysis of turbulent jets by means of $k-\epsilon$ models, Kyoto Univ., School of Civil Eng., Research Report No. 84-HY-01, 1984.
- 2) 細田 尚, 岩佐義朗, 余越正一郎: $k-\epsilon$ モデルによる水理解析に関する二, 三の検討, 京都大学防災研究所年報 第27号 B2, pp. 419-432, 1984.
- 3) Rajaratnam, N. : Turbulent Jets, Elsevier, 1976.
- 4) 福嶋祐介: $k-\epsilon$ 乱流モデルによる平面二次元密度噴流と噴流の相似解析, 土木学会論文集, 第405号, II-11, pp. 10-17, 1989.
- 5) 岩佐義朗, 松尾直規, 兪 朝夫: 貯水池水理の数値解析法とその適用について, 京都大学防災研究所年報 第22号 B2, pp. 341-354, 1979.

第4章 Buoyant Surface Jet に関する解析

本章では、第3章での結果を踏まえて周囲流体より高い水温、あるいは小さい密度で放出される surface jet (buoyant surface jet) 中の水温または密度分布の拡散現象について検討する。密度が非一様な場での乱流拡散係数と乱れ特性量の関係について述べ、その結果を組み込んだ $k-\epsilon$ モデルを用いて数値解析を行い、実験結果と比較・検討する。特に水温分布の成層化の成因について詳細な考察を行う。まず、密度流での乱流モデルの基礎となる Launder の研究¹⁾について述べておこう。

4.1 Launder の研究

空間的に密度が一様な場合の応力モデルに関して第1章で述べた。密度が一様でない場合への拡張も、Launder¹⁾, Zeman・Lumley²⁾, Mellor³⁾等によってなされている。

空間的に密度が一様でない場合、Reynolds 応力の関係式は次のように表せる。(用いている記号は第1章1.2に準ずる。)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = & - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\alpha}{T_a} (\overline{u_i T' g_j} + \overline{u_j T' g_i}) \\ & - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \frac{p}{\rho_a} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i u_j u_k} + \delta_{ik} \frac{\overline{u_j p}}{\rho_a} + \delta_{jk} \frac{\overline{u_i p}}{\rho_a} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここに、 T' : 水温変動, T_a : 基準水温, α : 無次元体積膨張係数, ρ_a : 基準密度, g_i : 重力加速度の成分。

Launder¹⁾は、圧力・ひずみ速度相関項(以後 $p-s$ 項と略記する。)に浮力効果を考慮して次式を提案している。

$$\frac{p}{\rho_a} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) = -c_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - c_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \quad (4.2)$$

ここに、 P_{ij} , P は次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} P_{ij} &\equiv - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\alpha}{T_a} (\overline{T' u_i g_j} + \overline{T' u_j g_i}) \\ P &\equiv - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\alpha}{T_a} \overline{u_i T' g_i} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

(4.3) 式に表れる浮力項は、圧力変動の関係式

$$\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial x_i^2} = - \left(\frac{\partial^2 (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k)}{\partial x_j \partial x_i} + 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial T'}{\partial x_i} \frac{g_i}{T_a} \right) \quad (4.4)$$

の右辺第3項より生じる項であり、上式の右辺第1, 2項より生じる項と区別して記述すべきである。
すなわち、(4.2) 式において

$$-c_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right)$$

は本来

$$\begin{aligned} & -c_2 \left[- \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right] \\ & -c_3 \left[- \frac{\alpha}{T_a} (\overline{T' u_i g_j} + \overline{T' u_j g_i}) + \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\alpha}{T_a} \overline{u_k T'} g_k \right] \end{aligned}$$

のように二つの定数を用いて分離して記述される。そのとき、Zeman・Lumley²⁾が示しているように $c_3 = 3/10$ となり、Launder¹⁾が提案している $c_2 = 0.6$ と一致しない。しかし、Weinstock⁴⁾は (4.4) 式右辺第一項からも同様の浮力項が生じ、結果的には Zeman・Lumley²⁾が導いた0.3よりも大きくなることを指摘している。Weinstock による詳細な研究も、結果的には Launder の (4.2) 式と大きく相違しないと考えられるので、本研究でも Launder の提案する (4.2) 式を用いる。

(4.1) 式中、その他の項は、第1章1.2で示した表示法が適用される。

一方、 $\overline{u_i T'}$ に関する関係式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i T'}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i T'}}{\partial x_k} &= - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k} + \overline{u_k T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\alpha \overline{T'^2}}{T_a} g_i \\ &\quad - (\lambda + \nu) \frac{\partial T'}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \frac{p}{\rho_a} \frac{\partial T'}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i T' u_k} + \frac{p T'}{\rho_a} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

(4.5) 式中、 p -s 項と類似の右辺第4項を、Launder は次のように表している。

$$\frac{p}{\rho_a} \frac{\partial T'}{\partial x_i} = -c_{1T} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i T'} - c_{2T} P_{iT} \quad (4.6)$$

ここに、 P_{iT} は次式で定義される。

$$P_{iT} \equiv - \left(\overline{u_k T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\alpha \overline{T'^2}}{T_a} g_i \right) \quad (4.7)$$

上式の右辺第1, 2項は、各々 (4.4) 式の右辺第2, 3項に対応すると考えられる。(4.6) 式右辺第1項は、(4.4) 式右辺第1項から生じた項と考えられる。

Launder は、(4.5) 式中右辺第3項を等方性の仮定より0としている。しかし、第1編第4章の濃

度変動場の解析によれば

$$\lambda \frac{\partial c'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \propto \overline{u_i c'} \frac{\epsilon}{k}$$

と表せた。このことから類推すれば

$$-(\lambda + \nu) \frac{\partial T'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \propto -\overline{u_i T'} \frac{\epsilon}{k}$$

となり、(4.6) 式の右辺第 1 項に含まれることになる。

(4.5) 式中、残りの未知量 $\overline{T'^2}$ は、第 1 編第 4 章で検討したように $\overline{T'^2}$ に関する関係式とその中に現れる ϵ_T に関する関係式を用いて求めることができる。しかし、Launder は $\overline{T'^2}$ 一方程式の生成項と散逸項の釣り合いを仮定し、 ϵ_T を次元的考察により $\epsilon_T \propto \epsilon \overline{T'^2}/k$ とおいて得られる次式で $\overline{T'^2}$ を定めている。

$$\overline{T'^2} = -c_T' \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k T'} \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad (4.8)$$

以上のことより、水温、流速の鉛直方向の変化が水平方向の変化に比べて大きいとき、(4.1) 式の生成項、散逸項、 $p-s$ 項の釣り合い、(4.5) 式の生成項、散逸項、圧力-水温変動相関項が釣り合うと考えると、最終的に次式が導かれている。

$$(u_i u_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} k)/k = \phi(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij})/\epsilon \quad (4.9)$$

$$-\overline{u_i T'} = \phi_T \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k u_i} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \phi_T' \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k T'} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{c_T' \alpha g_i k}{\epsilon T_a} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) \quad (4.10)$$

水理量の変化の卓越する方向である鉛直上方を x_3 方向とおき、水平面内の主流の方向を x_1 方向、 x_1-x_3 平面に垂直な方向を x_2 方向とする。

$$g_i = -g \cdot \delta_{i3}$$

と (4.9), (4.10) 式を用いて次式が導かれている。

$$\frac{\overline{u_1^2}}{k} = 0.94 + 0.41 \frac{R_f}{1 - R_f} \quad (4.11)$$

$$\frac{\overline{u_2^2}}{k} = 0.53 \quad (4.12)$$

$$\frac{\overline{u_3^2}}{k} = 0.53 - 0.41 \frac{R_f}{1 - R_f} \quad (4.13)$$

$$-\overline{u_1 u_3} = \beta \frac{\overline{u_3^2 k}}{\epsilon} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \quad (4.14)$$

$$-\overline{u_1 T'} = \phi_r \left(1 + 0.5 \frac{\gamma}{\beta} \right) \frac{\overline{u_1 u_3 k}}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial x_3} \quad (4.15)$$

$$-\overline{u_3 T'} = \gamma \frac{\overline{u_3^2 k}}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial x_3} \quad (4.16)$$

$$\gamma = \phi_r \frac{1.59 - 5.22 R_f}{1.59 - 2.82 R_f} \quad (4.17)$$

$$\frac{\beta}{\gamma} = \sigma_t = \frac{\phi}{\phi_r} \cdot \frac{1 + 0.8 \phi_r B - 0.5 \phi_r^2 B}{1 + \phi \phi_r B} \quad (4.18)$$

ここに、 R_f (flux Richardson 数)、 B は次式で定義される。

$$R_f \equiv \frac{\alpha g(-\overline{u_3 T'})}{T_a \cdot (-\overline{u_1 u_3}) \frac{\partial U_1}{\partial x_3}} = \frac{g(\overline{u_3 \rho'})}{\rho_a \cdot (-\overline{u_1 u_3}) \frac{\partial U_1}{\partial x_3}},$$

$$B \equiv \frac{1}{\phi_r} \cdot \frac{3 R_f}{1.59 - 5.22 R_f}$$

(4.11)～(4.18) 式は、Gibson・Launder⁵⁾が行っているように、 k — ϵ 方程式と連立することにより閉じた基礎式系を構成する。ただし、密度流の場合、 ϵ —方程式に浮力項を含む場合^{6,7,8)}と含まない場合^{5,9)}があり、次節において ϵ —方程式について若干の検討をしておこう。

4.2 ϵ —方程式に関する一考察¹⁰⁾

ϵ —方程式は第1章で述べたように次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} \\ & - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - 2 \left(\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_j \epsilon'} + \frac{2\nu}{\rho_a} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial p}{\partial x_k} \right) \\ & + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j^2} + 2\nu \frac{g_i}{\rho_a} \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (4.19)$$

最後の項が浮力項である。本節では homogeneous shear flow turbulence に関する Hinze¹¹⁾ の定式化を用いて、 ϵ —方程式の表示について簡単な考察を行う。

図4.1に示すような、流速と密度が x_3 の方向にのみ線形に変化する流れを考える。Hinze に従い、乱流構造の一様性を仮定したときの基礎式は次式となる。(ただし、Hinze が行っている全座標軸の反転による不変性は用いない。)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(q, t) + \mathbf{P}(q, t) \frac{dU_1}{dx_3} = \mathbf{F}(q, t) - 2\nu q^2 \mathbf{E}(q, t) - \mathbf{g} \cdot \mathbf{G}(q, t) \quad (4.20)$$

ここに、 $\mathbf{E}(q, t)$, $\mathbf{P}(q, t)$, $\mathbf{F}(q, t)$, $\mathbf{G}(q, t)$ は次式で定義される。 q は波数ベクトル $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ の大きさ。

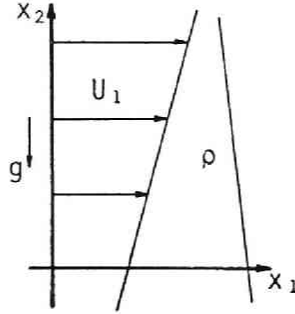


図4.1 概念図

$$\mathbf{E}(q, t) = 2\pi q^2 [\mathbf{E}_{i,t}(q_1, q_2, q_3, t)]_{av},$$

$$\mathbf{P}(q, t) = 2\pi q^2 [(\mathbf{E}_{3,1})_{av} + (\mathbf{E}_{1,3})_{av} - \left(q_1 \frac{\partial \mathbf{E}_{i,t}}{\partial q_3} \right)_{av}] \frac{dU_1}{dx_2},$$

$$\mathbf{F}(q, t) = 2\pi q^2 [\mathbf{F}_{i,t}(q_1, q_2, q_3)]_{av},$$

$$\mathbf{G}(q, t) = 2\pi q^2 [(\mathbf{G}_{\rho,2})_{av} + (\mathbf{G}_{2,\rho})_{av}]$$

$(\cdot)_{av}$ は $q = \text{const.}$ の球面での平均を表す。上式中 $\mathbf{E}_{i,j}$, $\mathbf{F}_{i,j}$, $\mathbf{G}_{\rho,i}$, $\mathbf{G}_{i,\rho}$ は次式で定義される。

$$\mathbf{Q}_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{i,j}(q_1, q_2, q_3, t) \exp(iq_1 \xi_1) dq_1 dq_2 dq_3,$$

$$\mathbf{F}_{i,j}(q_1, q_2, q_3, t) = iq_1 (-\mathbf{F}_{i,k,j} + \mathbf{F}_{i,k,j}),$$

$$\mathbf{S}_{i,k,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{i,k,j}(q_1, q_2, q_3, t) \exp(iq_1 \xi_1) dq_1 dq_2 dq_3,$$

$$\mathbf{S}_{i,k,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{i,k,j}(q_1, q_2, q_3, t) \exp(iq_1 \xi_1) dq_1 dq_2 dq_3,$$

$$\mathbf{R}_{\rho,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{\rho,j}(q_1, q_2, q_3, t) \exp(iq_1 \xi_1) dq_1 dq_2 dq_3,$$

$$R_{j,\rho}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} G_{j,\rho}(q_1, q_2, q_3, t) \exp(iq_1 \xi_1) dq_1 dq_2 dq_3,$$

$$Q_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{(u_i)_A (u_j)_B}$$

$$S_{i,k,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{(u_j)_B (u_i)_A (u_k)_A}, \quad S_{i,k,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B},$$

$$R_{\rho,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{(u_j)_B \frac{(\rho')_A}{\rho_a}}, \quad R_{j,\rho}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{(u_j)_A \frac{(\rho')_B}{\rho_a}}$$

ここに、 A, B は相関をとる点の位置であり、 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ は A と B の位置ベクトル $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ の差 $\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$ を表す。

(4.20) 式を q に関して 0 から無限大まで積分すれば、乱れエネルギーに関する関係式

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_1 u_3} \frac{dU_1}{dx_3} = -\epsilon - g \frac{\overline{\rho' u_3}}{\rho_a} \quad (4.21)$$

が得られる。

次に空間的な長さのスケール

$$L = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \frac{E(q)}{q} dq \quad (4.22)$$

を定義し、 L が $k^{3/2}/\epsilon$ に比例すると考える。

E, P, G, F は q に関して 0 から無限大まで積分すれば次式を満たす関数である。

$$\int_0^{\infty} E(q, t) dq = k, \quad \int_0^{\infty} F(q, t) dq = 0,$$

$$\int_0^{\infty} P(q, t) dq = \overline{u_1 u_3}, \quad \int_0^{\infty} G(q, t) dq = \frac{\overline{\rho' u_3}}{\rho_a}$$

これらの関数の無次元形 $E' = E/kL$, $F' = F/k^{3/2}$, $P' = P/\overline{u_1 u_3} L$, $G' = G/(\overline{\rho' u_3} L/\rho_a)$ が無次元波数 $q' = qL$ で普遍関数表示されると仮定する。これは、減衰する一様乱流場において、Kármán-Howarth 方程式に Rotta が適用した仮定¹²⁾と同様であり、乱れ Reynolds 数が十分大きい場合に用いられる。

(4.20) 式に $1/q$ を乗じて q に関して 0 から無限大まで積分した後、(4.21) 式を用いて整理すれば次式を得る。

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \left(\frac{5}{2} - C_1\right) \left(-\overline{u_1 u_3}\right) \frac{\epsilon}{k} \frac{dU_1}{dx_3} - \left(\frac{5}{2} + C_2\right) \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{C_3}{Re_\tau} - \left(\frac{5}{2} - C_4\right) g \frac{\epsilon}{k} \frac{\overline{\rho' u_3}}{\rho_a} \quad (4.23)$$

ここに、 C_1, C_2, C_3, C_4 は定数である。(4.23) 式中右辺第 3 項は、 Re_τ が十分大きいとき無視さ

れる。最後の項が浮力項である。これらの表示は、異なる長さのスケールを用いれば当然異なってくるが、(4.23) 式が現在用いられている最も単なる表示である。(4.19) 式との対応を考えれば次のようになる。

$$\begin{aligned}
 -2\nu \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &\rightarrow \left(\frac{5}{2} - C_1 \right) (-\overline{u_1 u_3}) \frac{\epsilon}{k} \frac{dU_1}{dx_3} \\
 -2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} - 2 \overline{\left(\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2} &\rightarrow -\left(\frac{5}{2} + C_2 \right) \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{C_3}{Re_T} \\
 2\nu \frac{g_i}{\rho_a} \overline{\frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} &\rightarrow -\left(\frac{5}{2} - C_4 \right) g \frac{\epsilon}{k} \frac{\overline{\rho' u_3}}{\rho_a}
 \end{aligned}$$

4.3 二次元 Buoyant Surface Jet の数値解析

対象とする流れの概要を図4.2に示す。周囲の水よりも水温の高い（密度の小さい）水が放出されたときの、水温分布、流速分布等の変化過程について検討する。

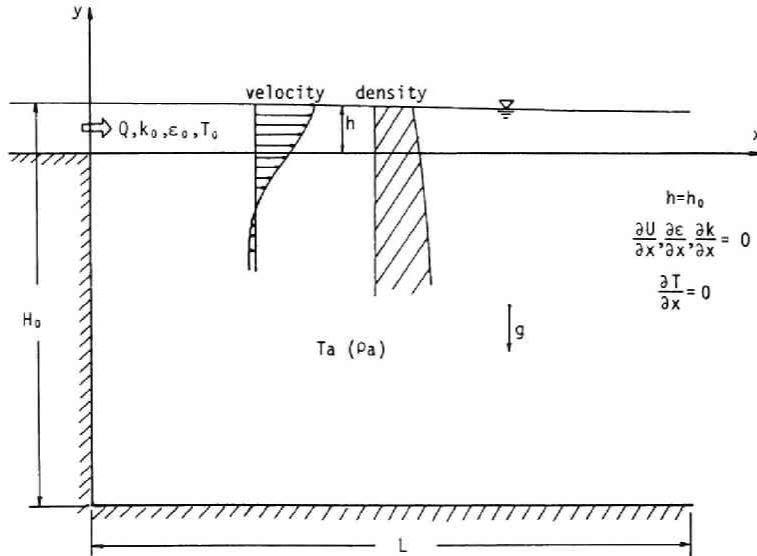


図4.2 流れの概要と座標系

二次元 Buoyant Surface Jet の解析は、水理量の分布形の相似性を仮定した積分モデルによる方法^{14, 15, 16, 17)}と、乱流モデルを用いた鉛直二次元流れとしての解析法^{5, 9, 10, 13, 18)}に分けられる。前者は、放出口の水理条件の違いによる水理量の減衰過程を検討する際に用いられ、計算が比較的容易なことか

ら、実用的に便利な方法と考えられる。後者は、水理量の分布形が放出口からの距離の増加とともに著しく変化するとき、その変化過程を検討する際有効と考えられる。

本研究では、放出口からの距離の増加に伴う水温分布の成層化過程を検討するため、鉛直二次元流れとしての解析法を用いる。乱流モデルとしては、応力モデルに至る手前として、4.1で述べた Launder の研究を $k-\epsilon$ モデルに組み込んだモデルを用いる。これは代数応力モデルとも呼ばれている。その際、 ϵ 方程式中の浮力項の係数をパラメータとし、計算結果に及ぼす影響、特に水温分布の成層化に及ぼす影響を検討する。

(1) 基礎式

基礎式は次のようになる。運動方程式には Boussinesq 近似を用い、また鉛直方向成分には静水圧を仮定している。用いる座標系は図4.2に示した。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'}) + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (4.25)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p}{\partial y} - g \frac{\rho}{\rho_a} \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{u'T'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{v'T'}) + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = & -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} (1 - R_f) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{D_{mx}}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{D_{my}}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] - \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = & c_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} D_{my} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{D_{mx}}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{D_{my}}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + 2\nu D_{my} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 + c_{\epsilon_3} \frac{g}{\rho_a} \frac{\epsilon}{k} D_{\tau_y} \frac{\partial \rho}{\partial y} - c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (4.29)$$

ここに、 (U, V) , (u', v') : 各々、平均流速、乱れ速度ベクトルの x, y 方向成分、 T, T' : 各々、平均水温と水温変動、 ρ, ρ_a : 平均密度と基準密度（周囲流体の密度）。

$-\overline{u'v'}$, $-\overline{u'^2}$, $-\overline{u'T'}$, $-\overline{v'T'}$ 等は4.1で述べた結果を用いて次のようになる。ただし、第3章でも用いたように、乱れ Reynolds 数の低い領域を考慮した Jones・Launder モデルを適用するため、 $-\overline{u'v'}$, $-\overline{v'T'}$ には第1章で示した Re_T の関数 f_μ を乗ずる。また、 c_{ϵ_2} も Re_T の関数である。

$$\left. \begin{aligned} -\overline{u'v'} = f_\mu \cdot \beta' \cdot \frac{\overline{v'^2} k}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y} = D_{my} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \beta' = 0.849\beta \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{u'^2}}{k} &= 0.94 + 0.41 \frac{R_f}{1 - R_f} \\
-\overline{v'T'} &= f_u \cdot \gamma \cdot \frac{\overline{v'^2 k}}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial y} = D_{\tau_y} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \gamma' = 0.849 \gamma \\
-\overline{u'T'} &= \phi_T \left(1 + 0.5 \frac{\gamma}{\beta} \right) \frac{\overline{u'v'k}}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial y}
\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{\overline{u'^2}}{k} &= 0.94 + 0.41 \frac{R_f}{1 - R_f} \\ -\overline{v'T'} &= f_u \cdot \gamma \cdot \frac{\overline{v'^2 k}}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial y} = D_{\tau_y} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \gamma' = 0.849 \gamma \\ -\overline{u'T'} &= \phi_T \left(1 + 0.5 \frac{\gamma}{\beta} \right) \frac{\overline{u'v'k}}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned}} \right\} \quad (4.31)$$

上式中、 f_u 、 c_{ϵ_2} は次式で与えられる。

$$f_u = \exp\left(-\frac{2.5}{1 + Re_T/50}\right), \quad c_{\epsilon_2} = c_{\epsilon_{2m}}[1.0 - 0.3 \exp(-Re_T^2)]$$

γ 、 β は (4.17)、(4.18) 式で与えられる。(4.28)、(4.29) 式中 D_{m_x} は D_{m_y} と等置した。

R_f は gradient Richardson 数 $R_t = -g\partial\rho/\partial y/\rho_a(\partial U/\partial y)^2$ を計算した後、 R_t と R_f の関係式 $R_t = \sigma_t R_f$ より求める。(σ_t は (4.18) 式で与えられる。) 定数の値は $k-\epsilon$ 定数 $c_{\epsilon_1} = 1.44$ 、 $c_{\epsilon_2} = 1.92$ 、 $\sigma_k = 1.0$ 、 $\sigma_\epsilon = 1.3$ と Launder が用いている $\phi = 0.2$ 、 $\phi_T = 1/3.2$ である。

本研究で用いる R_f と R_t の関係と、Mellor³¹⁾ の研究を基にした Yamada¹⁴⁾ の提案する

$$R_f = \frac{1}{2} \frac{A_2 E_5}{A_1 E_4} \left[R_t + \frac{A_1 E_3}{A_2 E_5} - \left\{ R_t^2 + 2 \frac{A_1}{A_2} \frac{E_3 E_5 - 2 E_1 E_4}{E_5^2} R_t + \left(\frac{A_1 E_1}{A_2 E_5} \right)^2 \right\}^{1/2} \right] \quad (4.32)$$

$$E_1 = B_1 - 6A_1, \quad E_2 = B_1 - 12A_1(1 - C_2) + 3B_2(1 - C_3),$$

$$E_3 = B_1(1 - 3C_1) - 6A_1, \quad E_4 = B_1(1 - 3C_1) + 12A_1(1 - C_2) + 9A_2(1 - C_2),$$

$$E_5 = B_1 + 3A_1(1 - C_2) + 3B_2(1 - C_3)$$

$$(A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3) = (0.78, 0.79, 15, 8, 0.056, 0.056, 0.3, 0.33)$$

を図4.3に示した。両者は R_f の小さい領域で一致し、 R_f の増加とともに急激に増加して行く。

(2) 実験の概要

(1)で示した基礎式を用いて数値解析を行い、従来の実験結果、本研究で行った若干の実験結果と比較・検討する。

実験は、京都大学工学部土木総合館地階の水理実験室に設置された全長4.0m、深さ30cm、幅10cmの水槽を用いて行われた。実験装置は上記水槽と温水供給装置からなっており、図4.4にその概要を示した。

温水槽、モーター・ポンプ、水温調節装置及び温水供給用のヘッド・タンクからなっており、水道水と温水槽で加熱された温水をミキシング・バルブで混合、温度調節し、一定水温となった温水をヘッド・タンクに供給している。温水の放出は、水路下流端より約50cmのところに設けられた放出口より行い、下流端には水位を調節する為の越流ゲートと、連行される周囲水を補給するためのパイプを設けた。

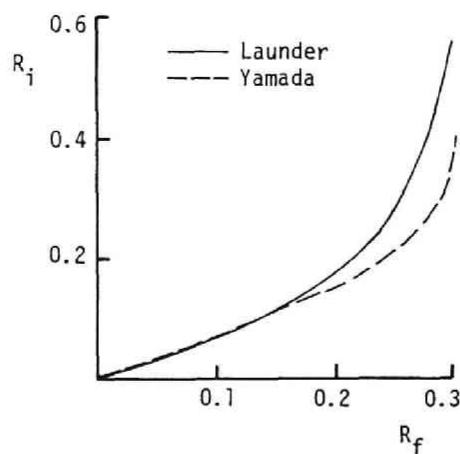


図4.3 R_i と R_f の関係

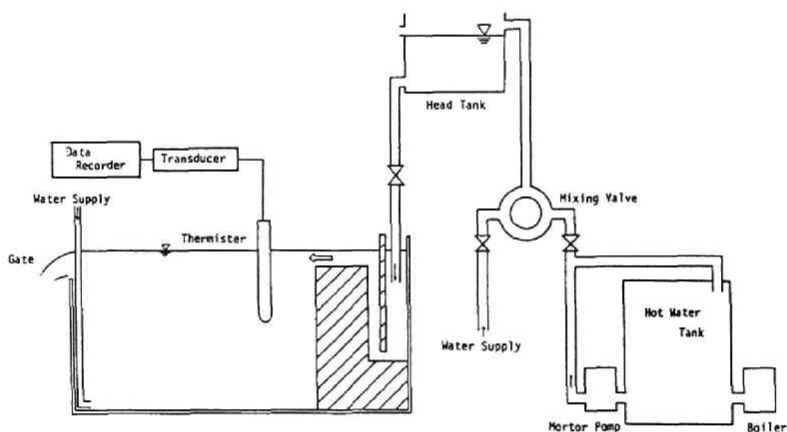


図4.4 実験装置の概要

水温計測には、サーミスタ（芝浦電子製作所製 LBT 型）を用い、水路幅方向の中央で、流下方向、水深方向に多点測定した。このサーミスタに変換器（芝浦電子製 TL-311）を接続し、その出力をデータ・レコーダ（TEAC R81）に記録した。

本研究で行った実験の水理諸量は、表4.1に示した Run 1 である。

(3) 計算条件と計算結果の考察

計算の境界条件は、第 3 章で述べた surface jet の解析と同様である。放出口において流量 Q_0 , $k = k_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ さらに $T = T_0$ (あるいは密度 ρ_0) を与えた。

基礎式に現れる k/ϵ , ϵ/k と, gradient Richardson 数

$$R_i = \frac{-g\partial\rho/\partial y}{\rho_a(\partial U/\partial y)^2}$$

の計算の際、 $k \rightarrow 0$ 、 $\epsilon \rightarrow 0$ あるいは $\partial U/\partial y \rightarrow 0$ のときの発散を防ぐため、微小な基準値 Δk 、 $\Delta \epsilon$ 、 ΔU を設定し、 $\epsilon_{i+1/2,j}^n < \Delta \epsilon$ 、 $k_{i+1/2,j}^n < \Delta k$ 、 $U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n < \Delta U$ の時、各々 $k/\epsilon \rightarrow 0$ 、 $\epsilon/k \rightarrow 0$ 、 $R_i \rightarrow 0$ とした。本研究では $\Delta \epsilon = 0.02 \cdot \epsilon_0$ 、 $\Delta k = 0.02 \cdot k_0$ 、 $\Delta U = 10^{-4}$ (cm/s) とおいた。

計算の条件を表4.1～4.3に示す。Run 1 は、(2)で述べた本研究で行った実験であり、Run 2 は川本²⁰⁾の温水を用いた実験 (Run1528)、Run 3 は Chu・Baddour²¹⁾が塩水を用いて行った実験 (Run15) である。どの場合も放出口の k 、 ϵ の値は $k_0/U_0^2 = 10^{-2}$ 、 $\epsilon_0 h_0/U_0^3 = 10^{-3}$ とした。また、 ϵ - 方程式の浮力項の係数 c_{ϵ_3} は 0 ～ 3 の範囲で変化させた。

表4.1 実験の水理諸量

	h_0 (cm)	U_0 (cm/s)	T_a (deg.)	T_0 (deg.)	$\Delta\rho/\rho_a$	Fr_d	Re
Run 1	0.74	15.4	11.8	28.3	0.0034	10.07	1360
Run 2	2.0	19.2	23.6	31.8	0.0023	9.02	4954 Kawamoto Run 1528
Run 3	0.74	18.1			0.005	9.49	Chu-Baddour Run 15

$$Fr_d = \frac{U_0}{\sqrt{g \frac{\Delta\rho}{\rho_a} h_0}}$$

表4.2 計算に用いた Δx 、 Δy 、 Δt

	Δx (cm)	Δy (cm)	Δt (sec)
Run 1	2.0	0.5	0.0025
Run 2	10.0	1.0	0.005
Run 3	4.0	0.25	0.005

表4.3 モデル定数

c_{ϵ_1}	$c_{\epsilon_2\infty}$	c_{ϵ_3}	σ_k	σ_ϵ	ϕ	ϕ_T
1.44	1.92	0-3	1.0	1.3	0.2	1/3.2

まず、図4.5に Run 1 の水温の鉛直分布を示した。放出口付近では c_{ϵ_3} の値による計算結果の差は小さく、計算値は実験値とほぼ適合している。実験値、計算値ともに水温は直線的に変化しており、

Chu・Vanvari²²⁾, 椿・小松¹⁶⁾によって提案されている実験式

$$\frac{T - T_a}{T_s - T_a} = 1 - a\eta \quad \left(\eta = \frac{\xi}{b}, \quad a = \begin{array}{ll} 0.5 & \cdots \cdots \text{Chu・Vanvari} \\ 0.45 & \cdots \cdots \text{椿・小松} \end{array} \right) \quad (4.33)$$

との適合性を検討したのが図4.6である。ここに、 ξ は自由表面より鉛直下方に測った距離であり、 b は流速 U が自由表面の流速の2分の1になる位置の ξ の値、 T_s は自由表面での水温である。計算値は(4.33)式にほぼ適合している。

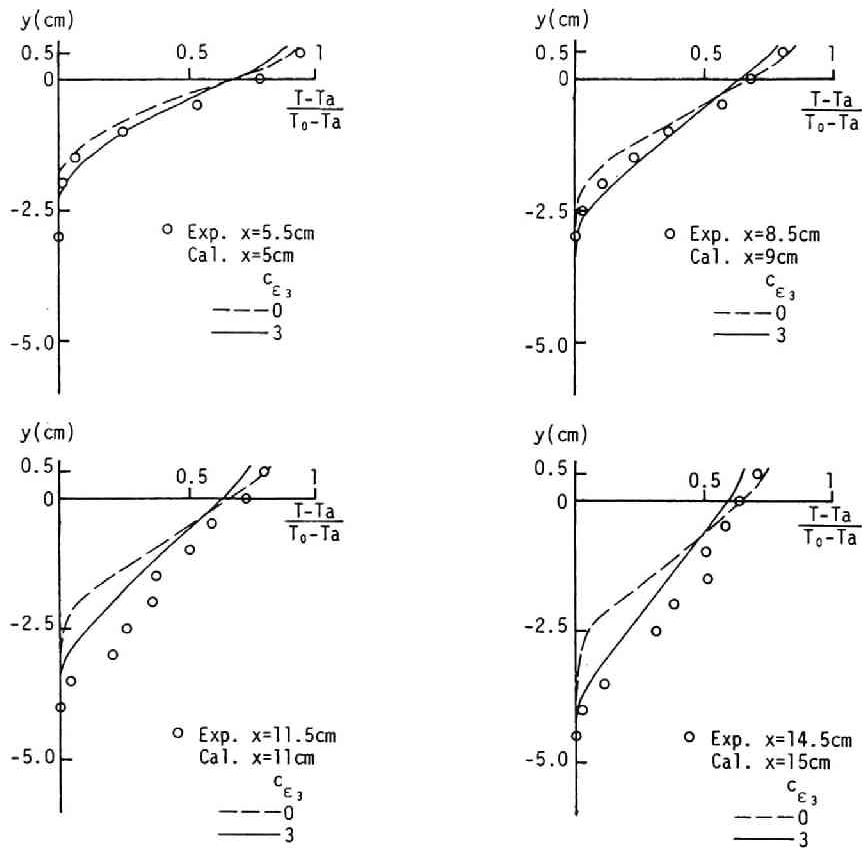


図4.5 水温の鉛直方向分布 (Run 1)

流速分布に関しては、Gauss 分布

$$\frac{U}{U_s} = \exp[-\ln 2 \cdot \eta^2] \quad (4.34)$$

に適合することが指摘されている^{16,22)}。(4.34)式と計算結果を示したのが図4.7であり、両者はよく

一致している。さらに、乱れエネルギー、乱流拡散係数の分布を図4.8、4.9に示した。どちらも、本編第3章に示した Simple Jet の分布形と類似している。

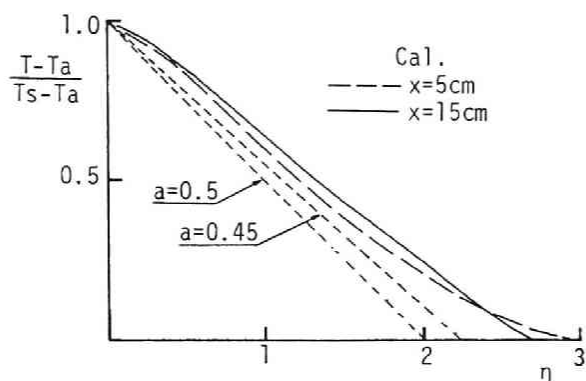


図4.6 水温分布の相似形

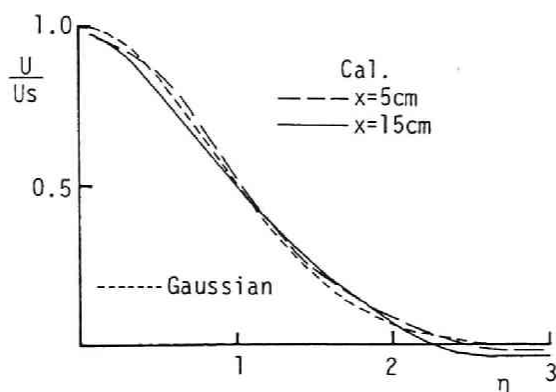


図4.7 流速分布の相似形

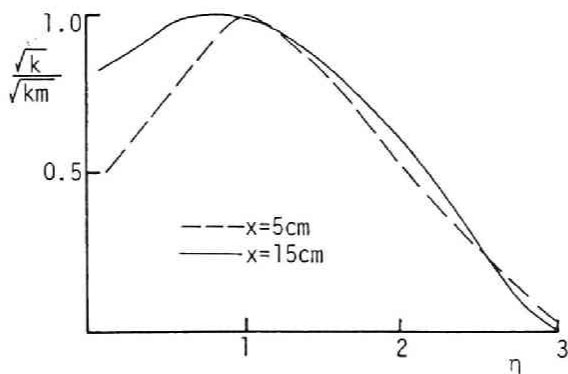


図4.8 乱れエネルギーの鉛直分布

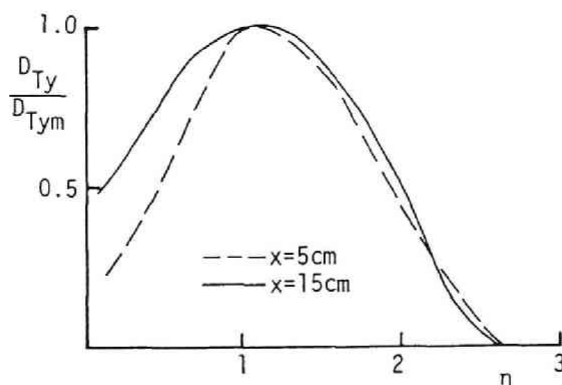


図4.9 乱流拡散係数の鉛直分布

次に、放出口よりかなり下流 ($x/h_0 \approx 100$) において水温分布の成層化がみられる Run 2 の条件を用いて計算を行った。水温の鉛直方向の分布を図4.10に、表層水温の流れ方向 (x 方向) の変化過程を図4.11に示した。 $c_{\epsilon_3} = 1$ のとき、計算結果は実験結果とほぼ一致している。図4.10に示した $x/h_0 = 100$ における分布形には、水温の成層化が見られる。次に、この水温分布の成層化過程について、計算結果を用いて考察してみよう。

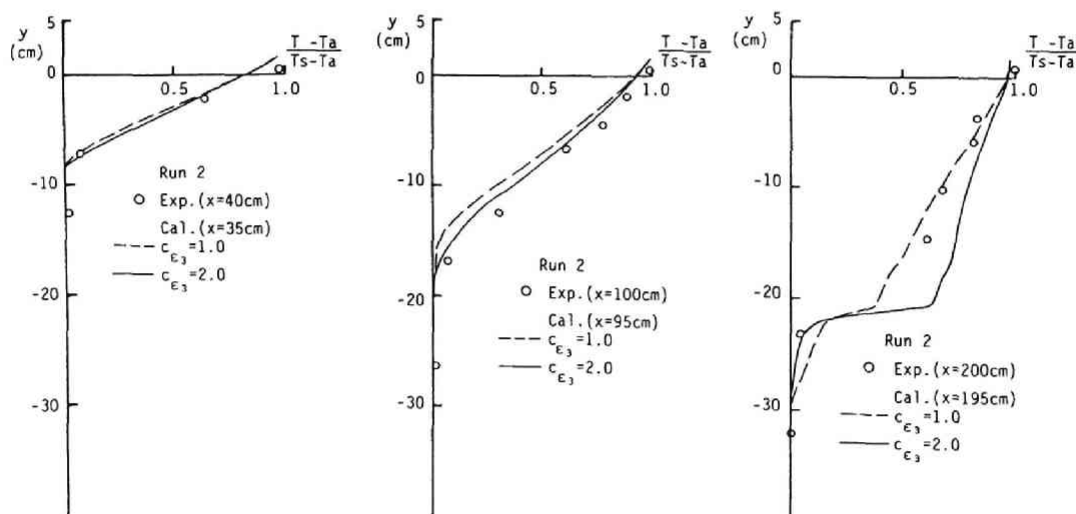


図4.10 水温の鉛直方向分布 (Run 2)

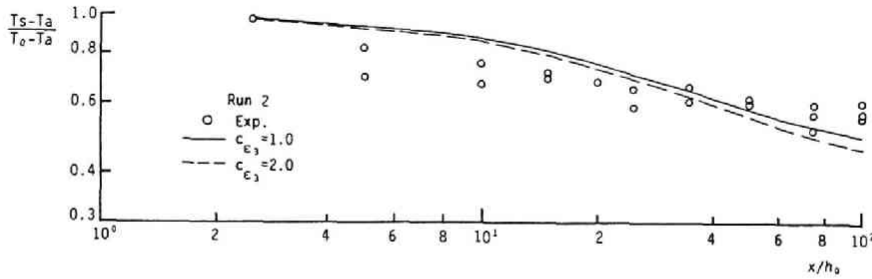


図4.11 表層水温の減衰過程

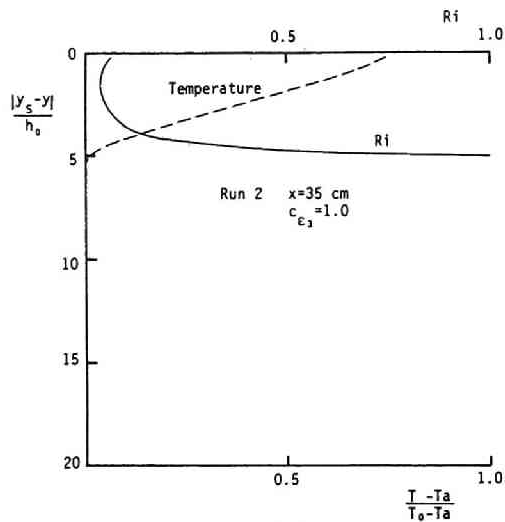
水温分布が直線的である $x = 35\text{cm}$ と、成層化が見られる $x = 195\text{cm}$ の間の Richardson 数 (R_i) と乱流拡散係数 D_{Ty} の鉛直分布を図4.12, 4.13に示した。水温分布が直線的に変化している $x = 35, 95\text{cm}$ において、Richardson 数は下方に向かって減少し、極小値をとってから急激に増加している (図4.12(a), (b))。このような Richardson 数の分布形は、Chu・Baddour²¹⁾ が (4.33), (4.34) 式を用いて導いた R_i の分布形特性と一致している。 $x = 105\text{cm}$ になると、 R_i の分布の中に矢印 A で示したようなふくらみが現れるようになる。このふくらみは、乱流 Prandtl 数 D_{my}/D_{Ty} が 1.0 になる $R_i \approx 0.22$ を越えたところで発生している。(図4.14に示したように、 $R_i < 0.22$ では $D_{my} < D_{Ty}$, $R_i > 0.22$ では $D_{my} > D_{Ty}$ となる。) このふくらみは増幅して $x = 115\text{cm}$ (図4.12(d)) では矢印 B で示したような極大値となる。この段階では、水温分布に顕著な変化は見られない。 $x = 125\text{cm}$ になると、矢印 B の極大値の上にもう一つの極大値 C が現れる。この位置での乱流拡散係数 D_{Ty} の分布を水温分布とともに示したのが図4.13(e)である。Richardson 数の極大値 C は乱流拡散係数 D_{Ty} の極小値 C に対応しており、この極小値の付近で水温分布の勾配が急になっている。 D_{Ty} の極小値の付近では熱輸送が妨げられるため、C 点を挟んで水温勾配が大きくなる。(C 点の上で水温の上昇、下で下降するため。) よって、C 点の Richardson 数はさらに増幅して行き、 $x = 175\text{cm}$ では限界 Richardson 数を超えるようになる。(図4.12(g)) このときの D_{Ty} と水温分布が図4.13(g)であり、成層界面上方で大きな乱流拡散が見られるようになり、成層化を促進して行く。

以上が、数値解析結果の考察より得られた水温の成層化過程の説明である。成層化の出発点と考えられる図4.12(c)の Richardson 数の分布形のふくらみは、 D_{my} , D_{Ty} に対する Richardson 数の効果の違いに起因すると思われる。そこで、同一の水理条件のもとで、 $D_{Ty} = D_{my}$ として計算した水温分布と Richardson 数の分布を図4.15に示した。水温成層化は見られない。

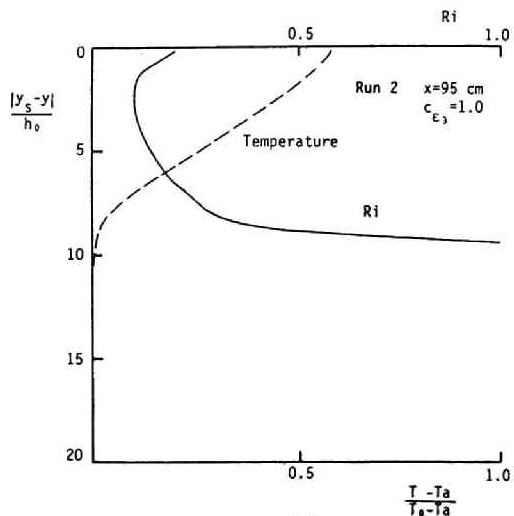
最後に、噴流の特性量の流れ方向の変化過程を見るために、Run 3 (Chu・Baddour²¹⁾ が塩水を用いて行った実験 Run15) の条件で数値解析を行い、その結果を図4.16~4.19に示した。計算結果は実験結果をほぼ再現しているようである。図中の記号の説明は次のようである。

$$L' = \frac{M_0}{F_0^{2/3}}, \quad U' = F_0^{1/3}, \quad B' = \frac{F_0^{4/3}}{M_0}, \quad Q' = \frac{M_0}{F_0^{1/3}}, \quad F_0 = h_0 g \frac{\rho_a - \rho_0}{\rho_a} U_0,$$

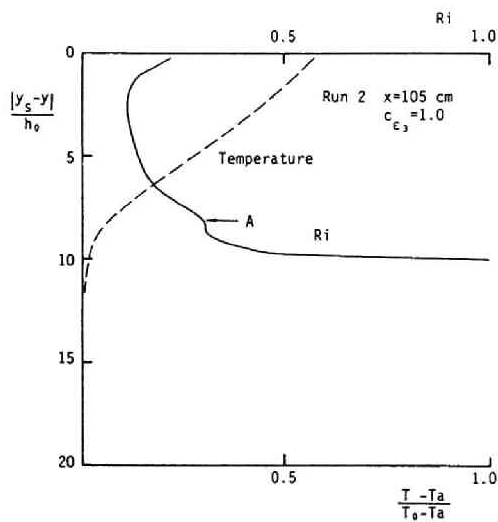
$$M_0 = U_0^2 h_0 + \frac{1}{2} g \frac{\rho_a - \rho_0}{\rho_a} h_0^2$$



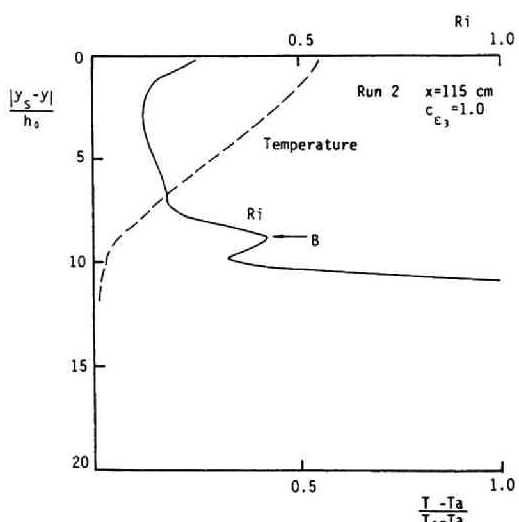
(a)



(b)



(c)



(d)

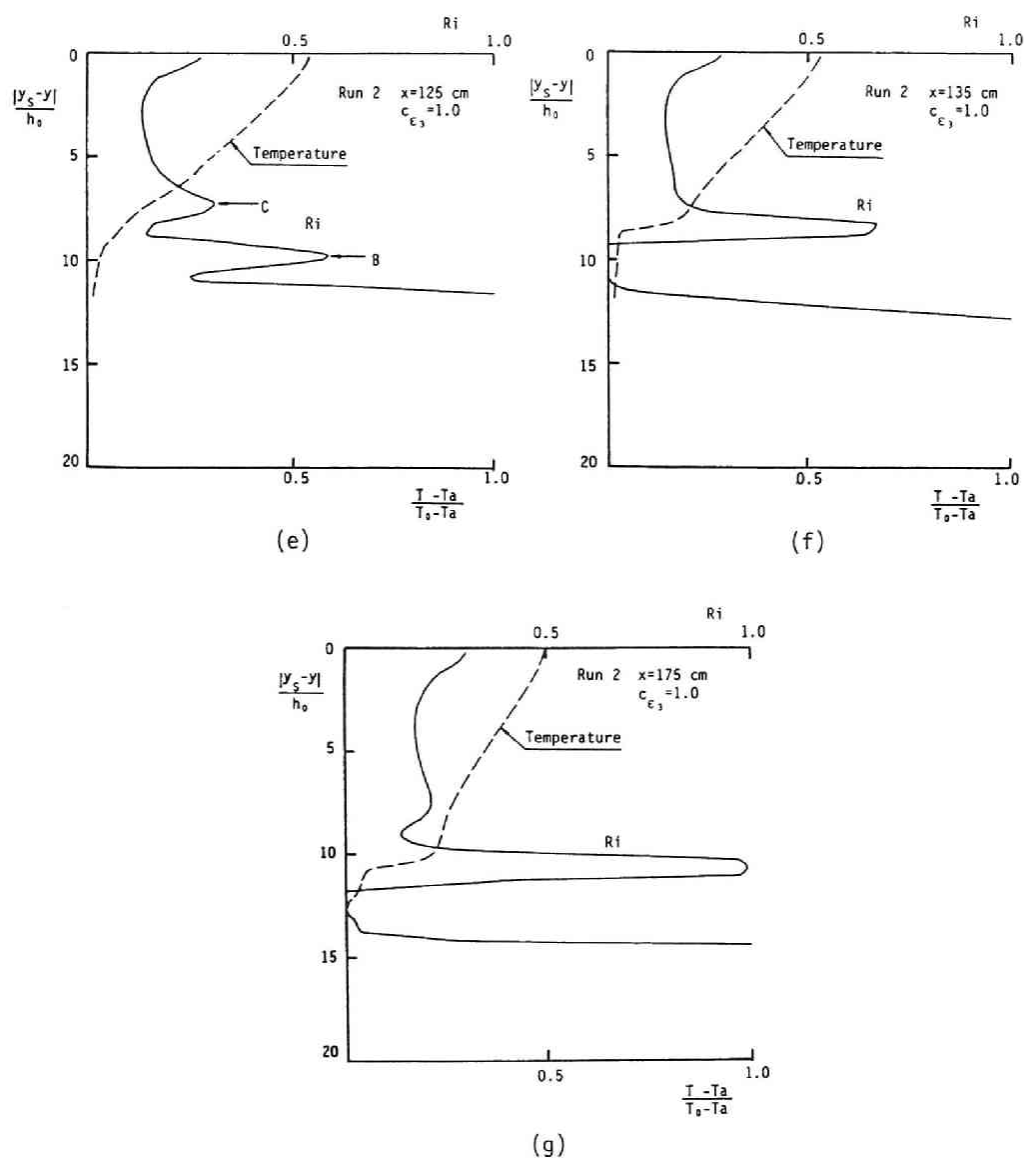
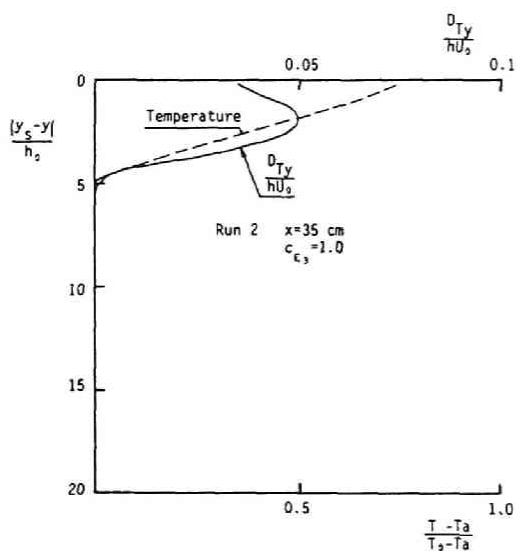
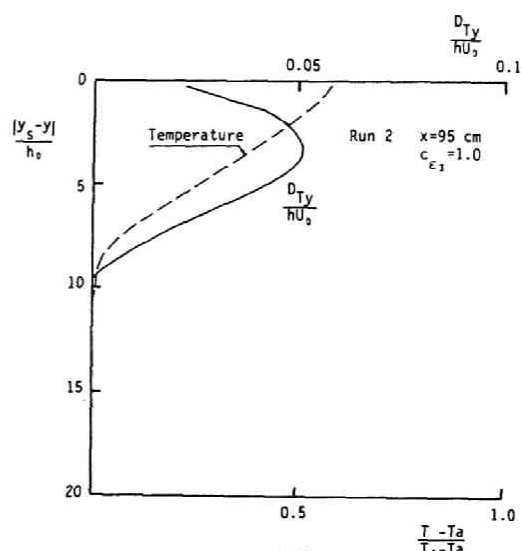


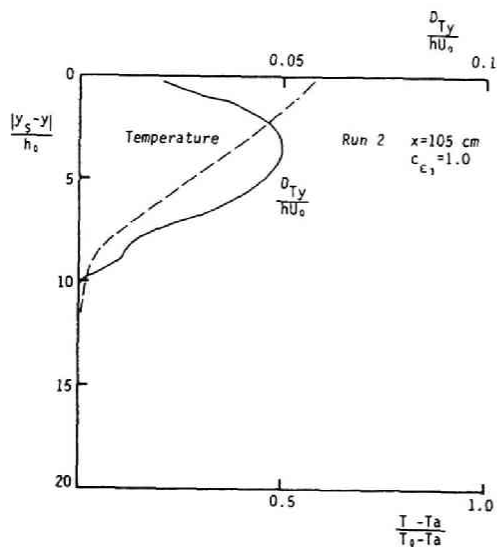
図4.12 水温の成層化に伴う Richardson 数分布の変化



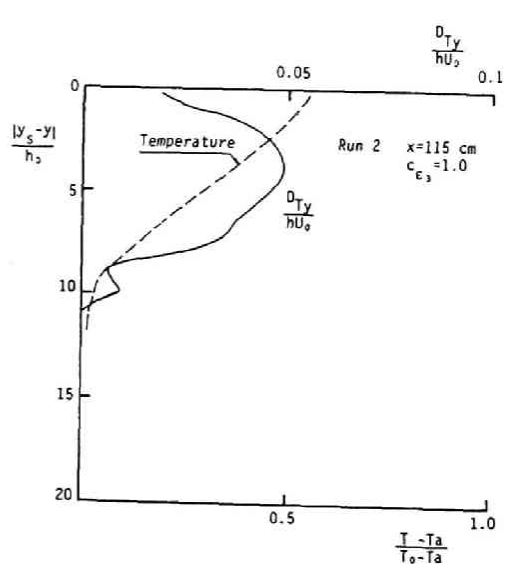
(a)



(b)



(c)



(d)

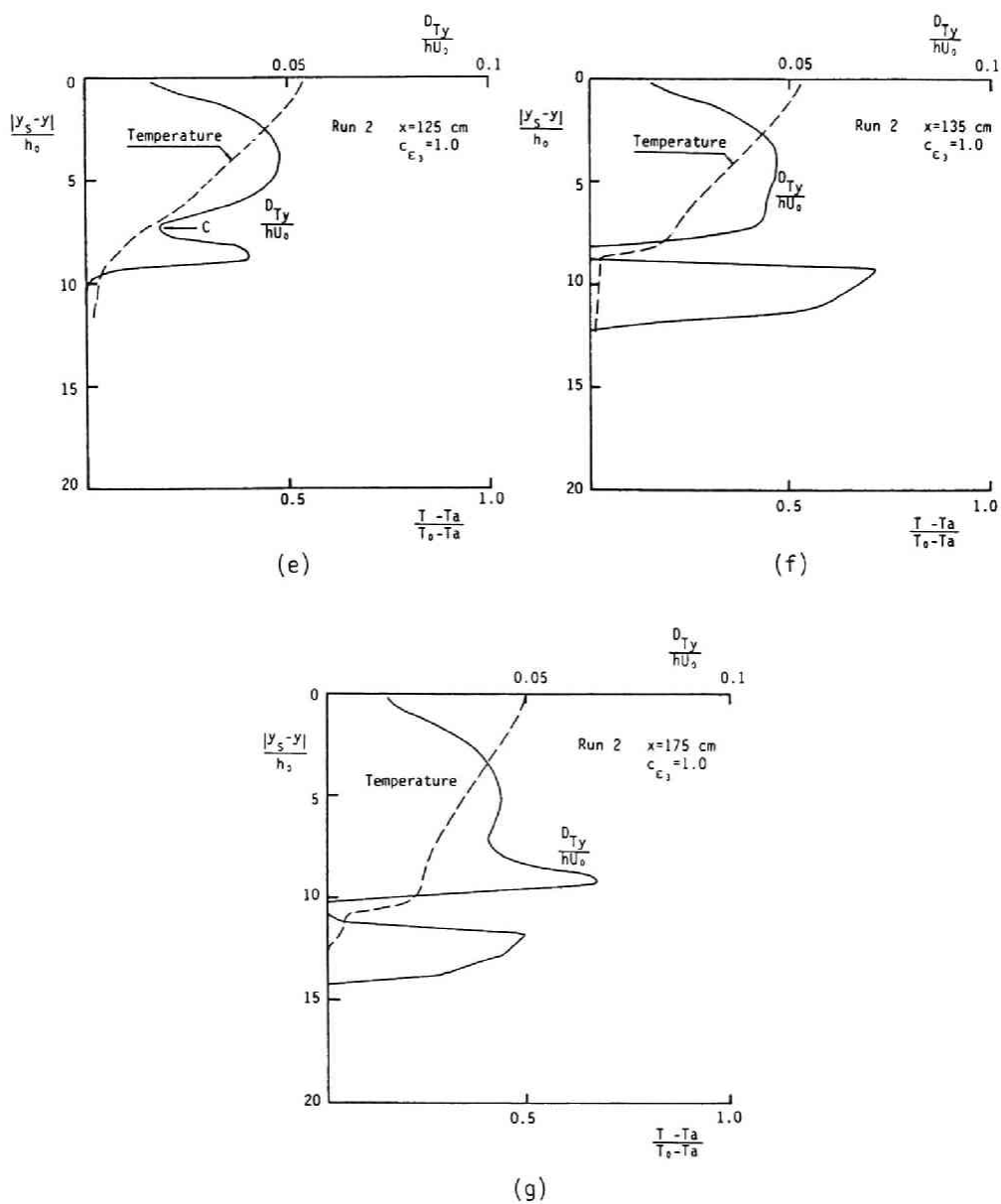


図4.13 水温の成層化に伴う乱流拡散係数分布の変化

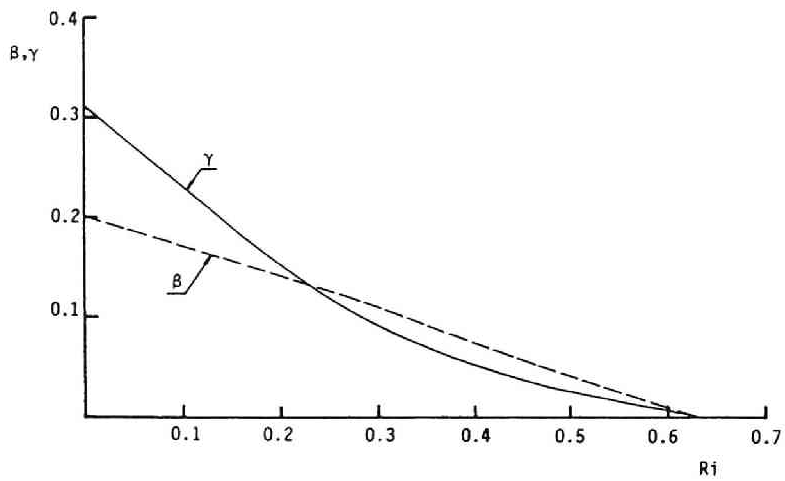


図4.14 β , γ の分布形
(渦動粘性係数, 乱流拡散係数への Richardson 数の影響)

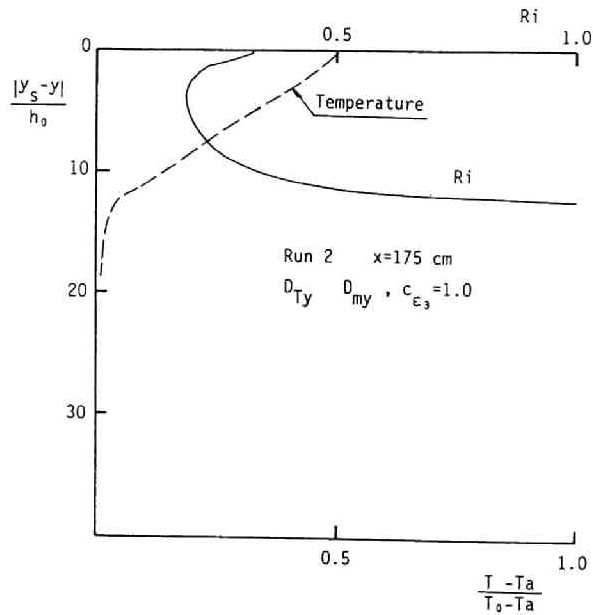


図4.15 $D_{Ty} = D_{my}$ とおいた場合の計算結果

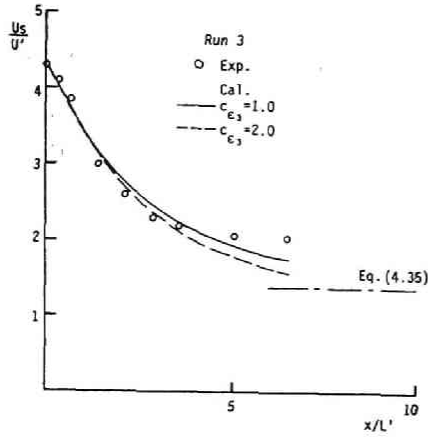


図4.16 表層流速の減衰過程

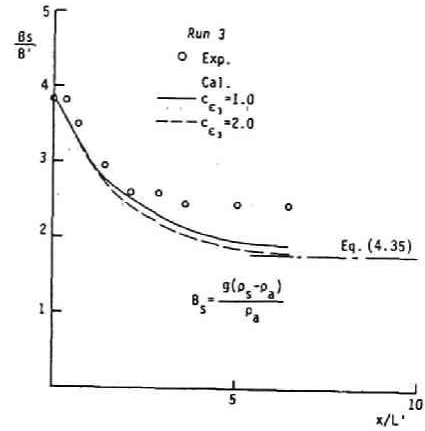


図4.17 表層密度偏差の減衰過程

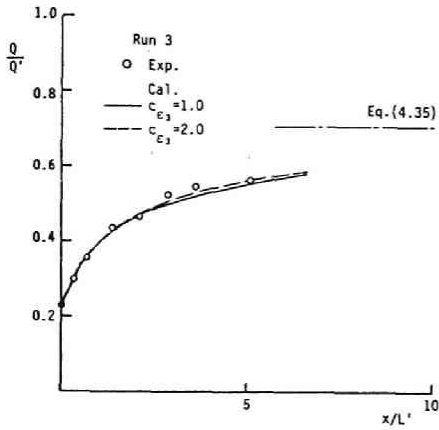


図4.18 単位幅流量の減衰過程

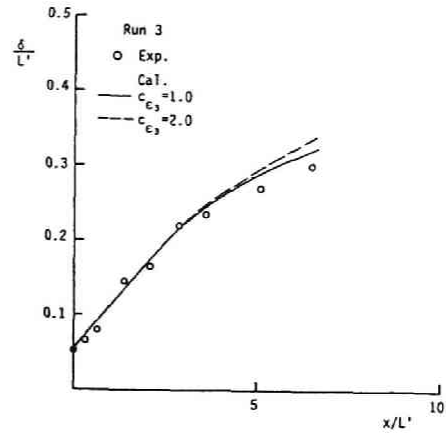


図4.19 噴流幅の変化過程

図中には、中辻¹⁷⁾が示した漸近値

$$\frac{U_{\infty}}{U_0} = 1.4 \frac{1}{F_{r0}^{2/3}}, \quad \frac{\rho_{\infty} - \rho_0}{\rho_a - \rho_0} = 1.8 \frac{F_{r0}^{4/3}}{F_{r0}^2 + 1/2}, \quad \frac{Q}{Q_0} = 0.71 \frac{F_{r0}^2 + 1/2}{F_{r0}^{4/3}} \quad (4.35)$$

も示してある。計算結果は(4.35)式に漸近していくように見える。(Q: 流速が0になる点より上方の単位幅流量)

4.4 結語

本章では、周囲流体より小さい密度で放出された二次元 buoyant surface jet について、 $k-\epsilon$ モデルの適用を試み、実験結果と比較した。まず、Launder の成層流の乱流構造に関する研究を概説し、

次に ϵ -方程式の構成に関して homogeneous shear flow turbulence を用いた考察を行った。Launder の研究を $k-\epsilon$ モデルに組み込んだ基礎式を用いて二次元 buoyant surface jet の数値解析を行い、従来より得られている実験的成果と比較・検討した。特に、水温分布が成層化して行く過程について Richardson 数、乱流拡散係数分布を用いて詳細に検討し、成層化の一つの原因が、渦動粘性係数と乱流拡散係数に及ぼす Richardson 数の効果の違いにあることが推察された。

参考文献

- 1) Launder, B. E. : On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum, J. Fluid Mech., Vol. 67, pp. 569-581, 1975.
- 2) Zeman, O. and Lumley, J. L. : Modeling buoyancy driven mixed layers, J. Atmospheric Science, Vol. 33, pp. 1974-1988, 1976.
- 3) Mellor, G. L. : Analytical prediction of properties of stratified planetary surface layer, J. Atmospheric Science, Vol. 30, pp. 1061-1069, 1973.
- 4) Weinstock, J. : Theoretical pressure-strain term in a stratified fluid J. Fluid Mech., Vol. 172, pp. 17-31, 1988.
- 5) Gibson, M. M. and Launder, B. E. : On the calculation of horizontal turbulence free shear flows under gravitational influence, J. Heat Transfer, Tran. ASME, 98c, pp. 81-87, 1976.
- 6) Plumb, O. A. and Kennedy, L. A. : Application of the $k-\epsilon$ model to natural convection from a vertical isothermal surface, J. Heat Transfer, Tran. ASME, 99-c1, pp. 79-85, 1977.
- 7) Zeman, O. and Lumley, J. L. : Buoyancy effects in entraining turbulent boundary layers: a second order closure study, Turbulent Shear Flows I, Springer Verlag, Heidelberg, pp. 295-306, 1979.
- 8) Andre, J. C., De Moore, G., Lacarrere, P., Therry, G. and du Vacht, R. : The clipping approximation and inhomogeneous turbulence simulations, Turbulent Shear Flows I, Springer Verlag, Heidelberg, pp. 307-318, 1979.
- 9) McGuirk, J. J. and Papadimitriou, C. : Buoyant surface layers under fully entraining and internal hydraulic jump conditions, Fifth Symposium of Turbulent Shear Flows, Cornell University, NewYork, pp. 22. 33-41, 1985.
- 10) 岩佐義朗, 細田 尚, 伊藤邦展 : 乱流モデルによる Buoyant Surface Jet に関する数値解析, 京都大学防災研究所年報 第30号 B2, pp. 583-595, 1987.
- 11) Hinze, J. O. : Turbulence, 2nd edn., McGraw-Hill, 1975.
- 12) Rotta, von J. C. : 大流通雄訳 (1975), 乱流, 岩波書店.
- 13) Iwasa, Y., Hosoda, T. and Itoh, K. : Hydraulic analysis of two-dimensional buoyant surface jets by means of turbulence model, Proc. 6th Congress of APD-IAHR, Kyoto. Vol. III, Environmental

Hydraulics, pp. 17-24, 1988.

- 14) 玉井信行：密度差を有する 2 次元水平噴流，第13回水理講演会講演集，pp. 91-96, 1969.
- 15) Koh, R. C. Y. : Two-dimensional surface warm jets, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol. 97, HY6, pp. 819-836, 1971.
- 16) 椿東一郎，小松利光：2 次元表層密度噴流における流れの特性と連行現象，土木学会論文報告集，第273号，pp. 69-81, 1978.
- 17) 中辻啓二：表層密度噴流の混合機構と拡がりに関する基礎的研究，大阪大学博士論文，1984.
- 18) 室田 明，中辻啓二，藤崎 豊：乱流モデルの成層せん断流への適用，第33回水理講演会論文集，pp. 583-588, 1989.
- 19) Yamada, T. : The critical Richardson number and the ratio of the eddy transport coefficient obtained from a turbulent closure model, J. Atmospheric Science, Vol. 32, pp. 926-937, 1976.
- 20) 川本正身：温排水の混合希釈とその処理に関する水工学的研究，京都大学学位論文，1976.
- 21) Chu, V. H. and Baddour, R. : Turbulent gravity-stratified shear flows, J. Fluid Mech., Vol. 138, pp. 353-378, 1984.
- 22) Chu, V. H. and Vanvari, M. R. : Experimental study of turbulent stratified shearing flow, J. Hydraulic Div., ASCE, Vol. 102, pp. 691-706, 1976.

第5章 浮遊砂流に関する解析

水理学で対象とする流れの場には、流水中に土砂等の固体粒子を含む流れが多く存在する。本章では、そのような流れの基本的なものとして、固定床上の浮遊砂を有する開水路流れを考え、そこに乱流モデルの適用を試みる。

浮遊砂を有する開水路流れに関しては、Vanoni¹⁾の実験的研究以来、抵抗則、流速分布特性を中心として数多くの実験的、理論的研究がなされてきた²⁻⁷⁾。その中で、滑面・粗面上の浮遊砂流の抵抗係数について系統的な実験を行った今本・大年^{8,9)}の研究をまとめると次のようになる。

- ① 滑面では浮遊砂濃度 (C_m ; 断面平均浮遊砂体積濃度, $C_m(\text{ppm})$; 断面平均浮遊砂重量濃度 (ppm)) の増加とともに抵抗係数 ($C_f \equiv 2 \cdot (u_* / U_m)^2$, U_m : 断面平均流速, u_* : 摩擦速度) は増加し、粗面では逆に減少する。
- ② 抵抗係数は Froude 数にも依存し、濃度を一定とすれば、滑面では Froude 数が減少するほど抵抗係数は増加するが、粗面では逆に Froude 数が減少するほど抵抗係数は減少する。また、滑面、粗面にかかわらず Reynolds 数の影響は小さい。①、②の特性を今本・大年に従って図示したものが図5.1である。

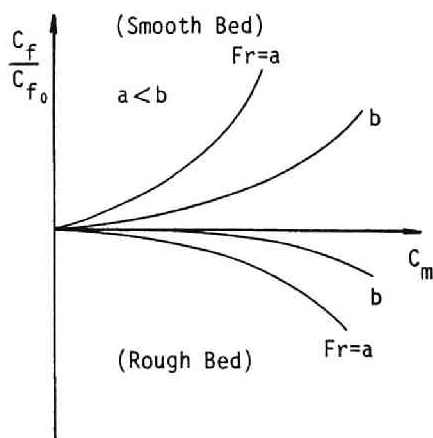


図5.1 抵抗則と浮遊砂濃度の関係

- ③ 流速分布特性に関しては、滑面、粗面にかかわらず路床近傍に Kármán 定数 $\kappa = 0.4$ の対数則のこう配に一致する領域が存在する。路床より離れるにつれて Kármán 定数が 0.4 より小さい対数則で近似できる領域が存在し、この領域の流速こう配は清水流のものより大きい。
- ④ 滑面と粗面の違いとして、滑面上では路床近傍の浮遊砂流の流速は清水流の流速よりかなり小さ

くなるが、粗面上では両者はほぼ一致している。これらの流速分布の特性を示している従来の実験結果を図5.2、図5.3に例示する^{3,10,11)}。(図5.2に示した Coleman¹⁰⁾の実験の u_* は、清水流の流速分布が $\kappa = 0.4$, $A_s = 5.5$ の対数則に適合するように修正している。)

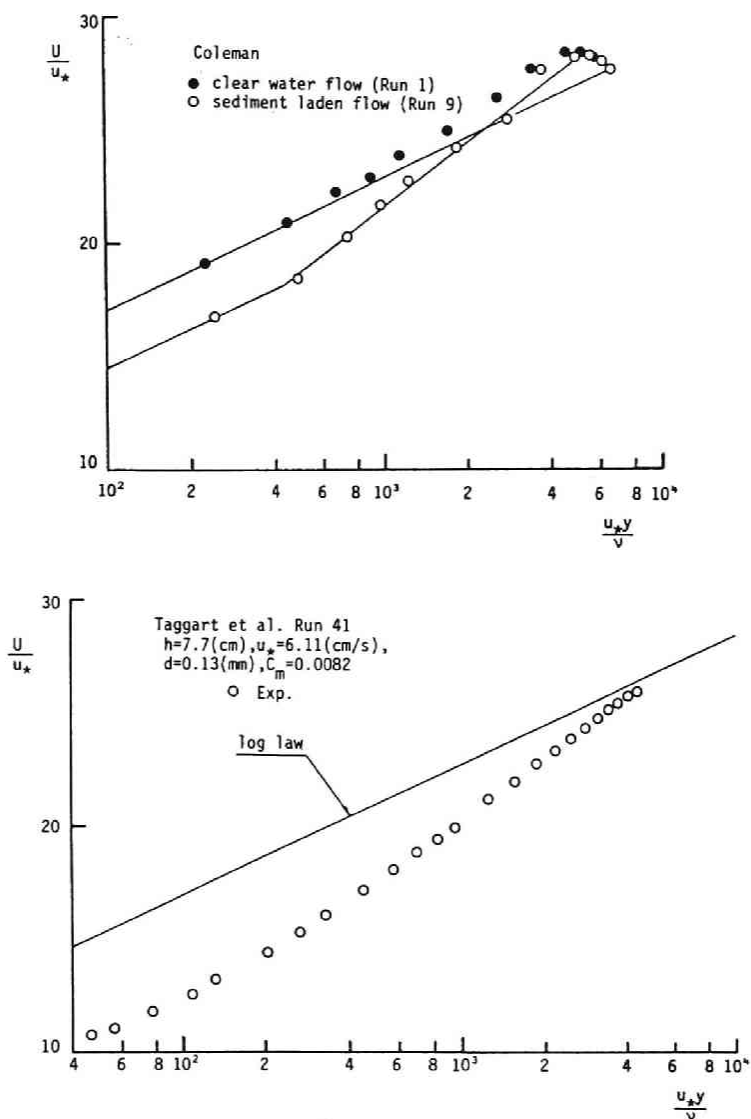


図5.2 滑面上の浮遊砂流の流速分布特性

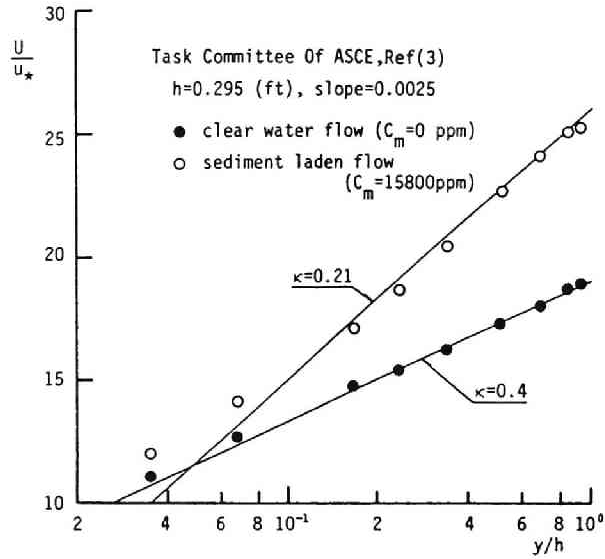


図5.3 粗面上の浮遊砂流の流速分布特性

このような実験的研究とともに多くの理論的研究も行われてきた。その中で、上述した粗面上の流速分布特性を表すことができる理論として Itakura・Kishi⁽¹¹⁾のものが挙げられる。

Itakura・Kishi は、基礎式として混相流としての乱れエネルギー方程式

$$\tau \frac{dU_{fx}}{dy} = \rho(\gamma-1)gw_0C + B \frac{\rho u_*^3}{\kappa L} + \frac{\rho u_*^3}{\kappa g} \quad (5.1)$$

を用いている。座標系は図5.4に示した。ここに、 U_{fx} : 混相流としての流速、 C : 浮遊砂の体積濃度、 ρ : 混相流としての密度、 τ : セン断応力、 γ : ρ_s/ρ 、 ρ_s : 砂粒子の密度、 u_* : 摩擦速度、 w_0 : 砂粒子の沈降速度、 g : 重力加速度、 B : 定数である。また、 L は次式で定義される特性長である。

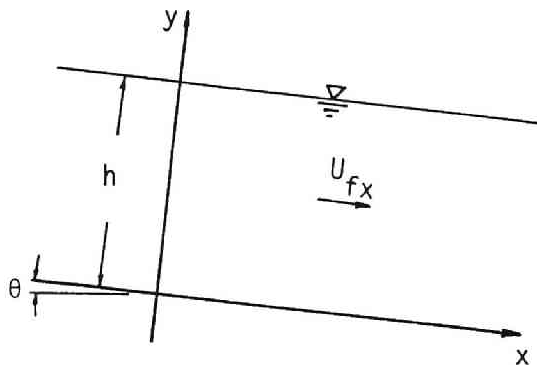


図5.4 座標系

$$\frac{1}{L} = \frac{\kappa g(\gamma-1)w_0 C_m}{u_*^3} \quad (5.2)$$

(5.1) 式中、右辺第 1 項は粒子浮遊のための仕事量を表し、第 2 項は粒子と流体の乱れ速度差に起因するエネルギー消費を表す。また、右辺第 3 項は流体の乱れエネルギー散逸率を意味する。

(5.1) は (5.2) 式と $\tau = \rho u_*^2$ と仮定して

$$\frac{dU}{dy} = \frac{u_*^3}{\kappa y} \left(1 + \alpha \frac{y}{L} \right) \quad (5.3)$$

と書き直すことができる。 α は 7 程度の定数。(5.3) 式を積分することにより、流速分布として次式が導かれている。

$$\frac{U}{u_*} = 8.5 + \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y}{k_s} + \phi_1 \frac{y}{k_s} \right) \quad \frac{u_* k_s}{\nu} > 70 \quad (5.4a)$$

$$\frac{U}{u_*} = 5.5 + \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{u_* y}{\nu} + \phi \frac{u_* y}{\nu} \right) \quad \frac{u_* k_s}{\nu} < 5 \quad (5.4b)$$

ここに、 $\phi = \alpha \nu / (u_* L)$, $\phi_1 = \alpha k_s / L$ (k_s : 相当粗度)。

(5.4) 式は log-linear 則と呼ばれる。Itakura・Kishi は (5.4) 式と従来の実験結果を比較し、よく一致すると述べている。(5.4) 式を水深にわたって積分して、

$$C_f = 2 \left(\frac{u_*}{U_m} \right)^2 \quad U_m: \text{水深平均流速} \quad (5.5)$$

で定義される抵抗係数 C_f と清水流の抵抗係数 C_{f_0} の関係が、次のように得られる。

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = \sqrt{\frac{1}{C_{f_0}}} + \frac{\phi_2}{2\kappa} \quad \left(\phi_2 = \alpha \frac{h}{L} \right) \quad (5.6)$$

(5.6) 式は、浮遊砂濃度の増加とともに C_f が減少することを示しており、粗面上の浮遊砂流の特性を表しているが、濃度の増加とともに C_f も増加するという滑面上の特性を説明することができない。また、(5.6) 式の誘導の際に $\tau = \rho u_*^2$ (=一定) と仮定し、さらに浮遊砂濃度を断面平均濃度で置き換える等、再検討を要する事項も含まれている。

以上の点に鑑み、本研究では、滑面・粗面上の浮遊砂流の特性を再現できるモデルについて検討する。まず、浮遊砂を有する場合の乱流モデルの基礎式の誘導過程を示す。その後、乱流拡散係数の表示、基礎式中に現れる流体と粒子の乱れ速度差に起因する項 ((5.1) 式右辺第 2 項に相当する項) のモデル化を検討しよう。従来の $k-\epsilon$ モデルを用いた浮遊砂流の解析^{12,13)}にはこの項が考慮されていない場合が多いが、本章の数値解析結果より、その重要性が確認される。

5.1 基礎式の誘導¹⁴⁾

層流での混相流の基礎式に二、三の仮定を用いることにより、乱れ Reynolds 数が小さい領域を考慮した混相流における $k-\epsilon$ モデルの誘導過程を示そう。本研究では、路床のごく近くの流れを再現するために、乱れ Reynolds 数の低い領域を考慮した $k-\epsilon$ モデルとして Jones・Launder モデル¹⁵⁾を用いる。

基礎式を誘導する際に用いられた主な仮定は次のようである。

- (i) 固相の平均流速は、液相の平均流速を用いて次のように表すことができる。

$$U_{pi} = U_{fi} - w_0 \delta_{iz} \quad (5.7)$$

ここに、 U_{pi} 、 U_{fi} ：固相、液相の平均流速ベクトルの成分、 i ：空間座標の方向を示す指数で、 $i = (1, 2, 3)$ が各々 (x ：流れ方向、 y ：水路床に垂直な方向、 z ：水路幅方向)を示す。

沈降速度 w_0 については、最近、沈降する粒子に及ぼす振動流の影響が検討されているが、開水路乱流の様に幅広い周波数分布を持ち、その特性が空間的にも変化するような場合については十分に明らかではない。そこで、本研究では慣用の Stokes 則に従って沈降する粒子の最終速度

$$w_0 = \frac{gd^2}{18\nu} \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \quad (d: \text{砂粒子直径}, \nu: \text{動粘性係数}) \quad (5.8)$$

を用いる。

- (ii) 固相と液相の乱れ速度は一致しない。すなわち

$$u_{pi}' \neq u_{fi}'$$

ここに、 u_{pi}' 、 u_{fi}' ：固相、液相の乱れ速度ベクトルの成分。この仮定により k 、 ϵ 方程式に乱れ速度の差に起因する付加項が現れる。先に述べた Itakura・Kishi の研究が示すように、浮遊砂流の特性を再現するためにはこの項を考慮することが重要と考えられ、5.2においてそのモデル化について考察する。

- (iii) 固相と液相の相互作用として、粘性抵抗と浮力項のみを考慮する。その他に、仮想質量項と液相の流速の非定常性に起因する項が存在するが、平均流の基礎式中のこれらの項は定常等流状態を考えているため無視できる。乱れ速度の基礎式中ではこれらの項は無視できないが、 k 方程式等を導くための平均操作を行うと、それらに起因する項は十分小さくなることが5.2の考察から確められる。

以上の仮定に基づいて、液相に関する連続式、Reynolds 方程式、 k 方程式と ϵ 方程式の誘導を示そう。

(1) 層流状態での基礎式¹⁶⁾

層流状態での液相，固相の質量保存則は各々次のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_f(1-c) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_f(1-c)u_{fj} = 0 \quad (\text{液相}) \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_p c + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_p c u_{pj} = 0 \quad (\text{固相}) \quad (5.10)$$

ここに， c ：固相の体積濃度， u_{fj} ， u_{pj} ：各々，液相，固相の流速ベクトルの成分， x_j ：空間座標， t ：時間を示す。

(5.9)，(5.10) 式より混相流の連続式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x_j} ((1-c)u_{fj} + cu_{pj}) = 0 \quad (\text{混相}) \quad (5.11)$$

一方，液相の運動方程式は次のように表せる。

$$\rho_f(1-c) \frac{\partial u_{fi}}{\partial t} + \rho_f(1-c)u_{fj} \frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} = \rho_f(1-c)g_i - \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \frac{\partial(1-c)\tau_{fij}}{\partial x_j} - R_i \quad (5.12)$$

ここに， g_i ：重力加速度ベクトルの成分， p_f ：液相の圧力， τ_{fij} ：液相の応力テンソルの成分， R_i ：固相と液相間の相互作用力。

仮定(iii)で述べたように， R_i として粘性抵抗と相互作用としての浮力のみを考慮すると， R_i は次式となる。

$$R_i = R_{di} - \rho_f g_i c \quad (5.13)$$

ここに， R_{di} は粘性抵抗を表し，Stokes 則を用いるとき

$$R_{di} = c \frac{18\nu\rho_f}{d^2} (u_{fi} - u_{pi}) \quad (5.14)$$

となる。

τ_{fij} は

$$\tau_{fij} = \rho_f \nu \left(\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{fj}}{\partial x_i} \right) \quad (5.15)$$

と表され，結局 (5.12) 式は次のようになる。

$$\frac{\partial u_{fi}}{\partial t} + u_{fj} \frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} = \frac{g_i}{1-c} - \frac{1}{\rho_f(1-c)} \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_{fi}}{\partial x_j^2} - \frac{R_{di}}{\rho_f(1-c)} \quad (5.16)$$

(2) 乱流状態での基礎式

① 連続式

次に乱流状態での表示を示す。 u_{f1} , c を平均値とそれからの偏差に分けて次のように表す。

$$u_{f1} = U_{f1} + u_{f1}', \quad c = C + c' \quad (\text{大文字が平均値を表す。})$$

まず混相流としての連続式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \{ (1-C)U_{f1} - c'U_{f1} + (1-C)u_{f1}' - c'u_{f1}' + CU_{p1} + c'U_{p1} + Cu_{p1}' + c'u_{p1}' \} = 0 \quad (5.17)$$

上式の平均をとり (5.7) 式を用いれば

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (U_{f1} - w_0 C \delta_{12} + \overline{c'(u_{p1}' - u_{f1}')}) = 0$$

となり、オーダーの比較により平均流の連続式として次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (U_{f1} - w_0 C \delta_{12}) = 0 \quad (5.18)$$

一方、乱れ速度の連続式は

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \{ -c'(u_{p1}' - u_{f1}') - c'w_0 \delta_{12} + u_{f1}' + (C + c')(u_{p1}' - u_{f1}') \} = 0$$

となり、これもオーダーの比較により次式を得る。

$$\frac{\partial u_{f1}'}{\partial x_1} = 0 \quad (5.19)$$

② 固相の質量保存則

固相の質量保存則は (5.10) 式より次式となる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (C(U_{f1} - w_0)) = \frac{\partial}{\partial x_1} (-\overline{c'u_{p1}'}) \quad (5.20)$$

③ 液相の運動方程式と乱れ速度の関係式

(5.16) 式において

$$\frac{1}{1-c} = \frac{1}{1-C-c'} \doteq \frac{1}{1-C} + \frac{c'}{(1-C)^2}$$

と近似できるとき、Reynolds 方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{fj}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{fj} u_{fj} + \overline{u_{fj}' u_{fj}'}) - U_{fj} \frac{\partial C w_0}{\partial x_2} - \overline{u_{fj}' \frac{\partial c' w_0}{\partial x_2}} \\ = \frac{g_i}{1-C} - \frac{1}{\rho_f(1-C)} \frac{\partial P_f}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_{fj}}{\partial x_j^2} - \frac{\overline{R_{di}}}{\rho_f(1-C)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

(5.16) 式から (5.21) 式を減ずれば、乱れ速度の関係式 (5.22) が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{fj}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{fj} u_{fj}' + u_{fj}' U_{fj} - \overline{u_{fj}' u_{fj}'}) \\ - U_{fj} \frac{\partial c' w_0}{\partial x_2} - u_{fj}' \frac{\partial C w_0}{\partial x_2} - \overline{u_{fj}' \frac{\partial c' w_0}{\partial x_2}} + \overline{u_{fj}' \frac{\partial c' w_0}{\partial x_2}} \\ = \frac{c' g_i}{(1-C)^2} - \frac{1}{\rho_f(1-C)} \frac{\partial p_f'}{\partial x_i} - \frac{c'}{\rho_f(1-C)^2} \frac{\partial P_f}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_{fj}'}{\partial x_j^2} - \frac{R_{di}'}{\rho_f(1-C)} - \frac{c' \overline{R_{di}}}{\rho_f(1-C)^2} \end{aligned} \quad (5.22)$$

④ 乱れエネルギーの関係式

乱れエネルギーの関係式は、(5.22) 式の両辺に u_{fj}' を乗じ平均をとることにより、次のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{u_{fj}'^2}}{2} + U_{fj} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\overline{u_{fj}'^2}}{2} + \overline{u_{fj}' u_{fj}'} \frac{\partial U_{fj}}{\partial x_j} + \overline{u_{fj}' \frac{\partial u_{fj}'^2}{\partial x_j}} \\ = \frac{\overline{c' u_{fj}'}}{(1-C)^2} g_i - \frac{1}{\rho_f(1-C)} \overline{u_{fj}' \frac{\partial}{\partial x_i} p_f'} - \frac{\overline{c' u_{fj}'}}{\rho_f(1-C)^2} \frac{\partial P_f}{\partial x_i} - \nu \frac{\overline{\partial u_{fj}'}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial u_{fj}'}}{\partial x_j} \\ - \frac{\overline{u_{fj}' R_{di}'}}{\rho_f(1-C)} - \frac{\overline{c' u_{fj}' R_{di}'}}{\rho_f(1-C)^2} \end{aligned} \quad (5.23)$$

(5.23) 式右辺中

$$\frac{\overline{c' u_{fj}'}}{(1-C)^2} g_i - \frac{\overline{c' u_{fj}'}}{\rho_f(1-C)^2} \frac{\partial P_f}{\partial x_i} - \frac{\overline{c u_{fj}' R_{di}'}}{\rho_f(1-C)^2} \quad (5.24)$$

は

$$\frac{\overline{c' u_{fj}'}}{(1-C)^2} \left(g \cos \theta - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P_f}{\partial x_2} - \frac{\overline{R_{di}}}{\rho_f} \right) = \frac{\overline{c' u_{fj}'}}{(1-C)^2} \left(g \cos \theta - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P_f}{\partial x_2} + C g \cos \theta \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \right)$$

と近似され、等流状態では静水圧分布

$$P_f = \rho_f g \cos \theta \int_{x_2}^h (1-C) dx_2 + \rho_p g \cos \theta \int_{x_2}^h C dx_2 \quad (5.25)$$

が成立しているとすれば (5.24) 式は 0 となる。このとき Jones・Launder モデルで用いられているモデル化を用いて、次の乱れエネルギーの関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + U_{fj} \frac{\partial k}{\partial x_j} = & -\overline{u_{fj}' u_{fj}'} \frac{\partial U_{fj}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{D}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \epsilon \\ & - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{\overline{u_{fj}' R_{d_i}'}}{\rho_f(1-C)} \quad (D: \text{渦動粘性係数}) \end{aligned} \quad (5.26)$$

上式中、右辺最終項は Stokes 則 (5.14) 式を用いれば

$$-\frac{\overline{u_{fj}' R_{d_i}'}}{\rho_f(1-C)} = -\frac{18\nu}{(1-C)d^2} \cdot [C(\overline{u_{fj}^2} - \overline{u_{fj}' u_{fj}'})] - \frac{g \cos \theta}{(1-C)} \frac{\overline{c' u_{fj}'} \rho_p - \rho_f}{\rho_f} \quad (5.27)$$

と表せる。上式中、右辺第 1 項が固相と液相の乱れ速度の差に起因する仕事の項で¹⁷⁾、Itakura・Kishi の用いた基礎式 (5.1) 中、右辺第 2 項に対応するものである。この項のモデル化について後に考察する。

⑤ 乱れエネルギー散逸率の関係式 (ϵ - 方程式)

(5.22) 式を (5.25) 式を用いて書き直せば次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{fj}'}{\partial x} + U_{fj} \frac{\partial u_{fj}'}{\partial x_j} + u_{fj}' \frac{\partial U_{fj}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_{fj}' u_{fj}' - \overline{u_{fj}' u_{fj}'}) + \overline{u_{fj}' \frac{\partial c' w_0}{\partial x_2}} \\ = -\frac{1}{\rho_f(1-C)} \frac{\partial p_f'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_{fj}'}{\partial x_j^2} - \frac{R_{d_i}'}{\rho_f(1-C)} + \frac{\overline{c' R_{d_i}'}}{\rho_f(1-C)^2} \end{aligned} \quad (5.28)$$

ϵ - 方程式は、(5.28) 式を x_k で微分し、 $2\nu \partial u_{fj}' / \partial x_k$ を乗じた後に平均をとることによって得られる。若干の計算の後、 ϵ - 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_{fj} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \frac{\partial U_{fj}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_{fj}'}{\partial x_k} \frac{\partial u_{fj}'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{fj}'}{\partial x_i} \frac{\partial u_{fj}'}{\partial x_j} \right) - 2\nu \overline{u_{fj}' \frac{\partial u_{fj}'}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_{fj}'}{\partial x_j \partial x_k}} \\ & - 2\nu \frac{\partial u_{fj}'}{\partial x_k} \frac{\partial u_{fj}'}{\partial x_j} \frac{\partial u_{fj}'}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_{fj}' \epsilon'} - \frac{2\nu}{\rho_f(1-C)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_{fj}'}{\partial x_k} \frac{\partial p_f'}{\partial x_k} \right) + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j^2} \\ & - 2 \left(\nu \frac{\partial^2 u_{fj}'}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial u_{fj}'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{R_{d_i}'}{\rho_f(1-C)} \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

となり、Jones・Launder モデルを用いて書き直すと次式が得られる。

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_{fj} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = c_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} D \frac{\partial U_{fj}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_{fj}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{fj}}{\partial x_i} \right) - c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k}$$

$$+2\nu D \left(\frac{\partial^2 U_{f1}}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{D}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) - 2\nu \frac{\partial u_{f1}'}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{R_{a1}'}{\rho_f(1-C)} \right) \quad (5.30)$$

右辺最終項を Stokes 則を用いて次のように近似する。

$$\begin{aligned} -2\nu \frac{\partial u_{f1}'}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{R_{a1}'}{\rho_f(1-C)} \right) &\doteq \frac{36C\nu^2}{(1-C)d^2} \left(\frac{\partial u_{f1}'}{\partial x_k} \frac{\partial u_{f1}'}{\partial x_k} - \frac{\partial u_{f1}'}{\partial x_k} \frac{\partial u_{f1}'}{\partial x_k} \right) \\ &\quad - \frac{2\nu}{(1-C)g \cos \theta} \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{\partial u_{f2}'}{\partial x_k} \frac{\partial c'}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (5.31)$$

上式中、右辺第2項は第1編第4章で述べた濃度変動場の解析で用いられた ϵ_c -方程式の生成項と同様であり、次のように表せる。

$$-\frac{2\nu}{(1-C)g \cos \theta} \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{\partial u_{f2}'}{\partial x_k} \frac{\partial c'}{\partial x_k} = c_{\epsilon_3} \frac{-u_{f2}' c'}{(1-C)g} \frac{\epsilon}{k} \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \quad (5.32)$$

以上、解析に必要な基礎式を導いた。ただし、 k - ϵ 方程式中の乱れ速度差に起因する項のモデル化が残されている。また、本編第4章で示したように、空間的に密度が非一様な場合、渦動粘性係数、乱流拡散係数が Richardson 数の関数となる。浮遊砂を有する流れにおいても同様のことが考えられるため、次に Launder¹⁸⁾あるいは Gibson・Launder¹⁹⁾が密度成層流に対して用いている方法を浮遊砂流の基礎式に適用して、渦動粘性係数、乱流拡散係数への Richardson 数の影響について考察しよう。

5.2 Richardson 数の影響に関する考察

Reynolds 応力方程式と濃度変動フラックスの関係式を、平均濃度が十分小さい場合に対して書き表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_{f1}' u_{fk}'}}{\partial t} + U_{fj} \frac{\partial \overline{u_{f1}' u_{fk}'}}{\partial x_j} &= -\overline{u_{fk}' u_{fj}'} \frac{\partial U_{f1}}{\partial x_j} - \overline{u_{f1}' u_{fj}'} \frac{\partial U_{fk}}{\partial x_j} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_{fj}' u_{f1}' u_{fk}'} + \frac{\delta_{1j} \overline{u_{fk}' p_f'}}{\rho_f} + \frac{\delta_{kj} \overline{u_{f1}' p_f'}}{\rho_f} \right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_{f1}' u_{fk}'}}{\partial x_j^2} - 2\nu \frac{\partial u_{f1}'}{\partial x_j} \frac{\partial u_{fk}'}{\partial x_j} \\ &\quad + \frac{1}{\rho_f} p_f' \left(\frac{\partial u_{fk}'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{f1}'}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{\rho_f} (\overline{u_{fk}' R_{a1}'} + \overline{u_{f1}' R_{ak}'}) \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{c' u_{f1}'}}{\partial t} + U_{fj} \frac{\partial \overline{c' u_{f1}'}}{\partial x_j} &= \overline{u_{f1}' u_{fj}'} \frac{\partial (1-C)}{\partial x_j} - \overline{c' u_{fj}'} \frac{\partial U_{f1}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_f} p_f' \frac{\partial c'}{\partial x_i} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{c' u_{f1}' u_{fj}'} + \frac{\overline{c' p_f'}}{\rho_f} \right) + \nu c' \frac{\partial^2 u_{f1}'}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\rho_f} \overline{c' R_{a1}'} \end{aligned} \quad (5.34)$$

(5.34) 式の誘導に際しては、濃度変動の c' の関係式

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + U_{fj} \frac{\partial c'}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(1-C) u_{fj}' + c' u_{fj}' - \overline{c' u_{fj}'} \right] = 0 \quad (5.35)$$

が用いられている。

(5.33), (5.34) 式を, Launder¹⁸⁾あるいはGibson・Launder¹⁹⁾が密度成層流に対して用いた方法によって表示する。すなわち, (5.33), (5.34) 式において非定常項, 移流項, 拡散項が無視されるとき, 残りの生成項, 散逸項, 圧力変動による配分項に関して第1章, 4章に示したモデル化を用いることにより次式が得られる。(以下, $i = 1, 2, 3$ を各々 x, y, z と表す。)

($\overline{u_{fx}^{'2}}$ の関係式)

$$\frac{\overline{u_{fx}^{'2}}}{k} = \frac{1}{c_1} \left[\frac{2}{3} c_1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{1-R_f} \left(2 - \frac{4}{3} c_2 + \frac{2}{3} c_{2,w} c_2 \right) + c_{1,w} \frac{\overline{u_{fy}^{'2}}}{k} - \frac{R_f}{1-R_f} \left(\frac{2}{3} c_3 - \frac{4}{3} c_{3,w} c_3 \right) \right] \quad (5.36)$$

($\overline{u_{fy}^{'2}}$ の関係式)

$$\frac{\overline{u_{fy}^{'2}}}{k} = \frac{1}{c_1 + 2c_{1,w}} \left[\frac{2}{3} c_1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{1-R_f} \left(\frac{2}{3} c_2 - \frac{4}{3} c_{2,w} c_2 \right) - \frac{R_f}{1-R_f} \left(2 - \frac{4}{3} c_3 + \frac{8}{3} c_{3,w} c_3 \right) \right] \quad (5.37)$$

($\overline{u_{fz}^{'2}}$ の関係式)

$$\frac{\overline{u_{fz}^{'2}}}{k} = \frac{1}{c_1} \left[\frac{2}{3} c_1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{1-R_f} \left(\frac{2}{3} c_2 + \frac{2}{3} c_{2,w} c_2 \right) + c_{1,w} \frac{\overline{u_{fy}^{'2}}}{k} - \frac{R_f}{1-R_f} \left(\frac{2}{3} c_3 - \frac{4}{3} c_{3,w} c_3 \right) \right] \quad (5.38)$$

($\overline{u_{fx}' u_{fy}'}$ の関係式)

$$-\overline{u_{fx}' u_{fy}'} = \frac{1 - c_2 + \frac{3}{2} c_{2,w}}{c_1 + \frac{3}{2} c_{1,w}} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\overline{u_{fy}^{'2}}}{k} \frac{\partial U_{fx}}{\partial y} \quad (5.39)$$

一方, $\overline{u_{fy}' c'}$ の関係式は

$$\frac{\overline{u_{fy}^{'2}}}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} = -c_{1c} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_{fy}' c'} - c_{1c,w} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_{fy}' c'} - c_{3c} \left(-g \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} c'^2 \right)$$

と書き表せるが, 平均濃度が十分小さいとき $\overline{c'^2}$ は微小量として無視すれば次式が得られる。

$$-\overline{u_{fy}' c'} = \frac{1}{c_{1c} + c_{1c,w}} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\overline{u_{fy}^{'2}}}{k} \frac{\partial C}{\partial y} \quad (5.40)$$

(5.39) 式の誘導の際, $-\overline{u_{fx}' u_{fy}'}$ の関係式の中で $\overline{u_{fx}' c'}$ を含む項は十分小さいとして無視した。また, flux Richardson 数 R_f は, 浮遊砂流の場合次式で定義される。

$$R_f \equiv \frac{\frac{g}{\rho_f} \frac{\rho_p - \rho_f}{c' u_{fy}}}{-u_{fx}' u_{fy}' \frac{\partial U_{fx}}{\partial y}}$$

gradient Richardson 数 R_t

$$R_t \equiv \frac{-g \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{\partial C}{\partial y}}{\left(\frac{\partial U_{fx}}{\partial y} \right)^2}$$

と R_f は, (5.39), (5.40) 式より

$$\frac{R_f}{R_t} = \frac{\frac{c' u_{fy}'}{\partial C / \partial y}}{\frac{u_{fx}' u_{fy}'}{\partial U_{fx} / \partial y}} = \frac{c_1 + \frac{3}{2} c_{1,w}}{(c_{1c} + c_{1c,w})(1 - c_2 + \frac{3}{2} c_{2,w})} \quad (5.41)$$

となり, Gibson・Launder が用いている定数値 ($c_1, c_2, c_3, c_{1,w}, c_{2,w}, c_{1c}, c_{2c}, c_{1c,w}$) = (1.8, 0.6, 0.5, 0.5, 0.3, 3.0, 0.33, 0.5) によって R_f/R_t の値を推定すれば $R_f/R_t \doteq 1.1$ となる。すなわち, 乱流拡散係数 D_p と渦動粘性係数 D の比 β が $\beta = D_p/D \doteq 1.1$ となり, 従来より用いられている $\beta = 1.2$ とほぼ同一の値が得られる。

(5.37), (5.39) 式を用いて D と R_t の関係を示したのが図5.5である。図には近似関数

$$\frac{D}{D_0} = 1 - \frac{R_t}{R_{tc}} = f(R_t) \quad (5.42)$$

さらに, 温度成層流において提案されている関数の例

$$\frac{D}{D_0} = \frac{1 - 1.5 R_t}{1 + 1.5 R_t} \quad (5.43)$$

も示した。 D_0 は $R_t = 0$ のときの渦動粘性係数の値であり, R_{tc} は限界 Richardson 数で0.4である。

(5.42) 式は, Smith・McLean²⁰⁾ が用いた関数形と同一であるが, その時用いられた R_{tc} は0.2とかなり小さい。上述した D と R_t の関係は, 温度成層流で用いられている関数形 (5.43) 式と $R_t < 0.2$ の範囲でよく一致している。

浮遊砂の乱流拡散係数 D_p は, (5.41) 式より

$$D_p = \beta D$$

と表され, 本研究では $\beta = 1.2$ とした。

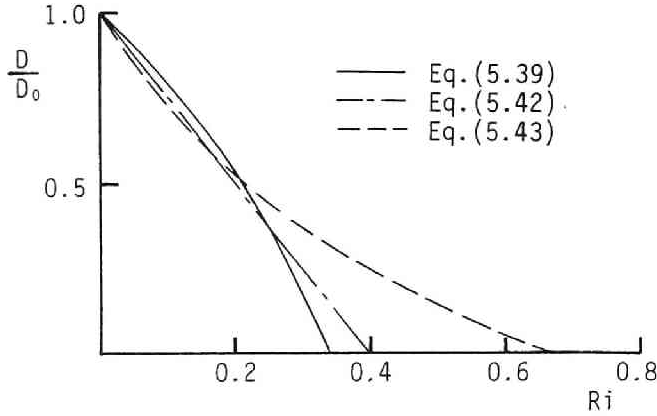


図5.5 渦動粘性係数と Richardson 数の関係

5.3 乱れ速度差による相互作用項のモデル化²¹⁾

(5.27), (5.31) 式に見られるように, 浮遊砂流の場合, 液相・固相間の乱れ速度差に起因する相互作用項が現れる。Donon・Wolfstein・Hersroni¹⁷⁾は, 次元考察により k -方程式に現れるこの項のモデル化を試み, この項を考慮する必要性を指摘している。本研究では, ランダムな液相の速度場中での単一粒子の運動を数値解析により求め, 統計処理することにより相互作用項の表示について検討する。

k -方程式の相互作用項は, (5.27) 式から Stokes 則を用いたとき

$$-\frac{18\nu}{(1-C)d^2}C(\overline{u_{fi}^{\prime 2}} - \overline{u_{fi}^{\prime}u_{pi}^{\prime}})$$

と表される。そこで, 液相の流速 u_{fi}^{\prime} がランダムに変動するときの単一粒子の運動を, 粒子の運動方程式

$$(\rho_p + \chi\rho_f)\frac{\pi d^2}{6}\frac{dv_p}{dt} = -\frac{1}{2}\rho_f C_b \frac{\pi d^2}{4}(v_p - v_f)|v_p - v_f| + \rho_f(1 + \chi)\frac{\pi d^3}{6}\frac{dv_f}{dt} \quad (5.44)$$

を解くことにより追跡し, モデル化に必要な諸量を求めることにする。ここに, v_p : 単一粒子の速度, v_f : ランダムな液相の速度, χ : 仮想質量係数で0.5である。 C_b は抗力係数で, Stokes 則に従う場合 ($C_b = 24/Re$), 定数 (= 0.36) とした場合, 次式で表される Reynolds 数 ($Re = |v_f - v_p|d/\nu$) の関数²²⁾を用いた場合の三通りで解析を行った。

$$C_b = \frac{24}{Re}(1 + 0.152\sqrt{Re} + 0.0151Re) \quad (5.45)$$

v_f は、自己相関係数 $R_{fL}(\tau) = \overline{v_f(t)v_f(t+\tau)}/\overline{v_f^2}$ が次式を満たすように乱数を用いて発生させられたランダム変動量である。

$$\overline{v_f^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{fL}(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau = \frac{2\overline{v_f^2} T_L}{1+(2\pi f T_L)^2}$$

ここに、 f : 周波数、 T_L : 液相の乱れ速度の Lagrange 的時間スケール。

無次元量

$$v_p' = \frac{v_p}{\sqrt{\overline{v_f^2}}}, \quad v_f' = \frac{v_f}{\sqrt{\overline{v_f^2}}}, \quad t' = \frac{t}{T_L}$$

を導入して、 C_D が Stokes 則、定数 (C_{D0}) の場合について (5.43) 式を書き改めると次式のようになる。

(Stokes 則の場合)

$$\left(\frac{\rho_p}{\rho_f} + \chi\right) \frac{dv_p'}{dt'} = -\frac{\nu T_L}{d^2} (v_p' - v_f') + (1 + \chi) \frac{dv_f'}{dt'} \quad (5.46a)$$

($C_D = C_{D0}$ の場合)

$$\left(\frac{\rho_p}{\rho_f} + \chi\right) \frac{dv_p'}{dt'} = -3C_{D0} \frac{\sqrt{\overline{v_f^2}} T_L}{d} (v_p' - v_f') |v_p' - v_f'| + (1 + \chi) \frac{dv_f'}{dt'} \quad (5.46b)$$

これらの二つの式の中に、無次元パラメータ $\nu T_L/d^2$, $\sqrt{\overline{v_f^2}} T_L/d$ が現れる。 C_D として (5.44) 式を用いた場合には、この二つのパラメータが同時に現れることになる。

Runge・Kutta・Gill 法による数値解析の結果を用いて $\overline{v_p'^2}/\overline{v_f'^2}$, $\overline{v_p'v_f'}/\overline{v_f'^2}$ を求め、 $T_L' = \nu T_L/d^2$ をパラメータとして図示したのが図5.6, 5.7である。Stokes 則を用いたときの $\overline{v_p'^2}/\overline{v_f'^2}$ についての計算結果は、Hinze の求めた解析解

$$\frac{\overline{v_p'^2}}{\overline{v_f'^2}} = \frac{aT_L' + b^2}{aT_L' + 1} \quad (5.47)$$

$$\left(a = \frac{36}{1+2\rho_p/\rho_f}, \quad b = \frac{3}{1+2\rho_p/\rho_f}, \quad T_L' = \frac{\nu T_L}{d^2}\right)$$

に一致することを確認している。

図5.6, 5.7をみると、 C_D として (5.45) 式を用いた結果は、本研究の解析の範囲では Stokes 則を用いた結果とほぼ一致する。

k -方程式でモデル化が必要な項は $\overline{v_p'v_f'}/\overline{v_f'^2}$ であり、(5.47) 式と同様に

$$\frac{\overline{v_f' v_p'}}{\overline{v_f'^2}} = \frac{e T_L' + f}{e T_L' + 1} \quad (5.48)$$

と表示する。 $T_L' = 0$ での値は f であり, (5.46a) 式より

$$f = \frac{1 + \chi}{\rho_p / \rho_f + \chi} \quad (5.49)$$

を得る。また, e の値は, 計算結果より $\rho_p / \rho_f = 2.65$ のとき $e \doteq 5.0$ となった。 T_L を $T_L = c_L k / \epsilon$ とおいて, (5.27) 式中の相互作用項は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \overline{u_{f1}'^2} \left(1 - \frac{\overline{u_{f1}' u_{p1}'}}{\overline{u_{f1}'^2}} \right) &= c_k k \left(1 - \frac{e T_L' + f}{e T_L' + 1} \right) \\ &= c_k k \frac{1 - f}{e \cdot c_L \cdot Re_T (\nu / \sqrt{k} d)^2 + 1} \end{aligned} \quad (5.50)$$

c_k は乱流場が等方性であれば 2 となるので, 2 程度の定数と考えられる。

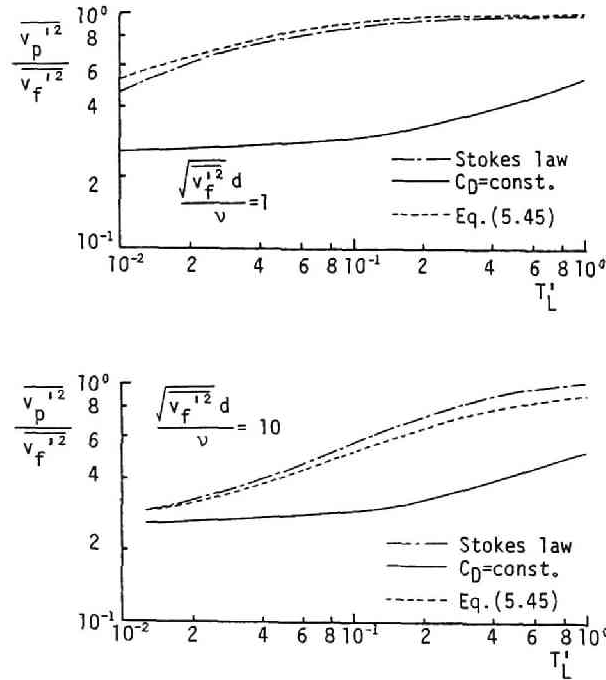


図5.6 $\overline{v_p'^2} / \overline{v_f'^2}$ と T_L' の関係

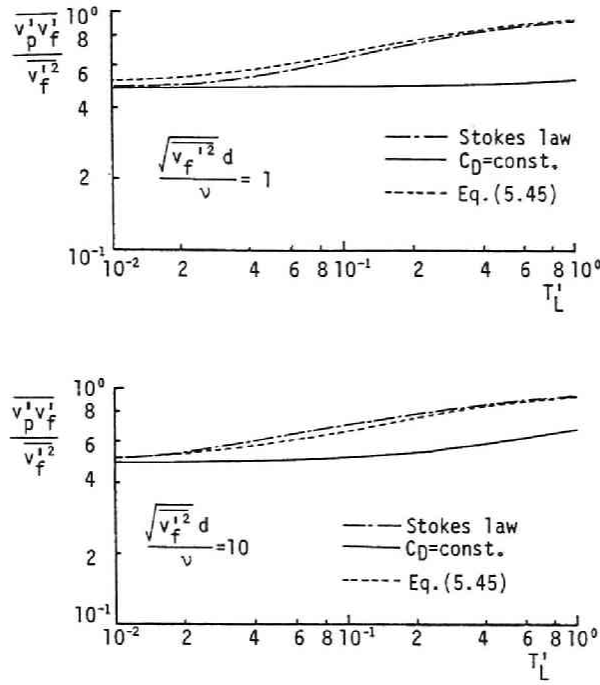


図5.7 $\overline{v_p' v_f'} / \overline{v_f'^2}$ と T_L' の関係

(5.50) 式は、浮遊砂が何の拘束もなく動くことができるという条件のもとで導かれた。路床近傍では路床により浮遊砂の運動が拘束を受ける。路床近傍において、砂粒の運動形態の遷移が起っているとすれば、砂粒子、流体の乱れ速度の減少により (5.50) 式の発生源である R_{ai}' が路床に近づくにつれ急激に減少すると考えられる。そこで、本研究では路床よりある程度離れた点より上方で (5.50) 式を考慮した。この基準点として相対水深 $y/h \doteq 0.03$ とした。

計算結果を用いて仮想質量項に起因する $\overline{v_f' dv_p' / dt}$, $\overline{v_f' dv_f' / dt}$ を評価すると 0 に近い値となり、仮定(iii)で述べたように、 k -方程式の中に仮想質量項に起因する項を含んでいない。

(5.50) 式と次元的考察により、 ϵ -方程式に現れる相互作用項の表示として次式が考えられる。

$$2\nu \left(\frac{\partial u_{f1}'}{\partial x_k} \frac{\partial u_{f1}'}{\partial x_k} - \frac{\partial u_{f1}'}{\partial x_k} \frac{\partial u_{p1}'}{\partial x_k} \right) = c_{\epsilon_1} \epsilon c_k k \left(1 - \frac{e T_L' + f}{e T_L' + 1} \right) \quad (5.51)$$

しかし、後に示す数値解析結果より、 ϵ -方程式の相互作用項を無視しても浮遊砂流の特性が再現されることが判ったので、本研究ではこの項を省略している。

5.4 基礎式の無次元化と無次元パラメータ

広長方形断面の等流状態を考えると、図5.4の座標系のもとで基礎式は次のようになる。

$$\frac{\partial U_{fx}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u_{fx}' u_{fy}'} + Cw_0 \frac{\partial U_{fx}}{\partial y}) = \frac{g \sin \theta}{1-C} + \nu \frac{\partial^2 U_{fx}}{\partial y^2} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} = & D \left(\frac{\partial U_{fx}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{D}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] - \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \\ & - \overline{cu_{fy}'} \frac{g}{1-C} \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} - \frac{18\nu}{(1-C)d^2} C \cdot c_k k \frac{1-f}{ec_L Re_T (\nu/\sqrt{k}d)^2 + 1} \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = & c_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} D \left(\frac{\partial U_{fx}}{\partial y} \right)^2 - c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{D}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + 2\nu D \left(\frac{\partial^2 U_{fx}}{\partial y^2} \right)^2 \\ & - c_{\epsilon_3} \overline{cu_{fy}'} \frac{g}{1-C} \frac{\epsilon}{k} \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} [w_0 C(C-1)] = \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{cu_{fy}'}) \quad (5.55)$$

$$-\overline{u_{fx}' u_{fy}'} = D \frac{\partial U_{fx}}{\partial y}, \quad -\overline{cu_{fy}'} = D_p \frac{\partial C}{\partial y} \quad (5.56)$$

(5.52) 式左辺第 3 項は、粒子の沈降によって生ずる上方への流れ ($U_{fy} = Cw_0$) による応力伝達を表し、通常無視されることが多い。しかし、壁面のごく近傍の C が大きくなる領域ではこの項を無視できないことが、後の計算結果の考察より明らかとなる。

Jones・Launder モデルでは、 D は乱れ Reynolds 数 ($Re_T \equiv k^2/\nu\epsilon$) の関数であり、(5.42) 式に示した Richardson 数の影響と、第 2 章 (2.15) 式に示した水表面近くでの $\overline{u_{fy}^2}$ の減衰の効果も考慮して

$$D = c_\mu (Re_T) f(R_i) \frac{f_{D_0}(y)}{f_{D_0}(-\infty)} \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5.57)$$

と表すことができる。 c_μ の関数形は Launder・Sharma の提案しているものを用いた。

$$c_\mu(Re_T) = c_{\mu\infty} \exp \left[\frac{-3.4}{(1 + Re_T/50)^2} \right] \quad (5.58)$$

また、 $f_{D_0}(y)/f_{D_0}(-\infty)$ を再記すれば次のようになる。

$$\frac{f_{D_0}(y)}{f_{D_0}(-\infty)} = 1 - \exp \left[-B \frac{(h-y)\epsilon_s}{k_s^{3/2}} \right] \quad (B = 10) \quad (5.59)$$

さらに、第 1 章で述べたように c_{ϵ_2} も Re_T の関数であり、Jones・Launder の提案する次式を用いる。

$$c_{\epsilon_2} = c_{\epsilon_{2\infty}} [1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)] \quad (5.60)$$

次に、下に示すような無次元量を用いて基礎式を無次元化し、無次元パラメータを導こう。

$$U_{fx'} = \frac{U_{fx}}{u_*}, \quad k' = \frac{k}{u_*^2}, \quad \epsilon' = \frac{\epsilon h}{u_*^3}, \quad D' = \frac{D}{hu_*}, \quad D_{\rho}' = \frac{D_{\rho}}{hu_*},$$

$$t' = \frac{tu_*}{h}, \quad y' = \frac{y}{h}$$

このとき、基礎式 (5.52)~(5.55) は次のようになる。

$$\frac{\partial U_{fx'}}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(D' \frac{\partial U_{fx'}}{\partial y'} \right) - C \frac{w_0}{u_*} \frac{\partial U_{fx'}}{\partial y'} + \frac{1}{1-C} + \frac{1}{Re_*} \frac{\partial^2 U_{fx'}}{\partial y'^2} \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial k'}{\partial t'} = D' \left(\frac{\partial U_{fx'}}{\partial y'} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\left(\frac{D'}{\sigma_*} + \frac{1}{Re_*} \right) \frac{\partial k'}{\partial y'} \right] - \frac{2}{Re_*} \left(\frac{\partial \sqrt{k'}}{\partial y'} \right)^2 - \epsilon'$$

$$+ \frac{1}{Fr_*^2} D_{\rho}' \frac{1}{1-C} \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} - 1 \right) \frac{\partial C}{\partial y'} - \frac{18C}{(1-C)} c_{\kappa} k' \frac{1-f}{ec_L(k'/\epsilon') + Re_* \cdot (d/h)^2} \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial \epsilon'}{\partial t'} = c_{\epsilon_1} \frac{\epsilon'}{k'} D' \left(\frac{\partial U_{fx'}}{\partial y'} \right)^2 + c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon'^2}{k'} + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\left(\frac{D'}{\sigma_{\epsilon}} + \frac{1}{Re_*} \right) \frac{\partial \epsilon'}{\partial y'} \right]$$

$$+ \frac{2}{Re_*} D' \left(\frac{\partial^2 U_{fx'}}{\partial y'^2} \right) + \frac{c_{\epsilon_3} D_{\rho}'}{Fr_*^2 (1-C)} \frac{\epsilon'}{k'} \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} - 1 \right) \frac{\partial C}{\partial y'} \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\frac{w_0}{u_*} C(C-1) \right] = \frac{\partial}{\partial y'} \left(D_{\rho}' \frac{\partial C}{\partial y'} \right) \quad (5.64)$$

上式中に見られるように、次の無次元パラメータが現れる。

$$Fr_* = \frac{u_*}{\sqrt{gh}}, \quad Re_* = \frac{u_* h}{\nu}, \quad \frac{w_0}{u_*}, \quad \frac{\rho_p}{\rho_f}, \quad \frac{d}{h}$$

ρ_p/ρ_f は土砂を対象としているので2.65である。また、 d/h は k -方程式最終項の分母に表れるが、 $d = 0.1\text{mm}$ 程度の粒径を対象としているので $(d/h)^2$ は非常に小さくなり、 $ec_L(k'/\epsilon') \gg Re_* (d/h)^2$ と考えられるので、 d/h の影響を考慮する必要はないと思われる。そこで、浮遊砂流の流速分布特性、抵抗則に影響するパラメータとして Fr_* 、 Re_* 、 w_0/u_* と断面平均浮遊砂濃度が考えられる。

上で用いてきた摩擦速度 u_* は通常

$$u_* = \sqrt{gh \sin \theta} \quad (5.65)$$

と定義されるが、浮遊砂流では、流体が路床に及ぼすせん断応力から

$$u_* = \sqrt{\int_0^h \frac{g \sin \theta}{1-C} dy} \quad (5.66)$$

と定義する方が妥当であろう。しかし、本研究で対象としている浮遊砂平均濃度は最大でも0.005程度であり、両者にほとんど違いがみられないので、算定の容易な (5.65) 式を用いる。

以上、滑面を対象として述べてきたが、粗面の場合には路床ごく近傍の流れを再現する必要がないと考えられるので、標準型の $k-\epsilon$ モデルを用いる。すなわち、(5.52) 式右辺第 3 項、(5.53) 式右辺第 4 項及び分子拡散項、(5.54) 式右辺第 4 項及び分子拡散項が無視され、 $c_\mu = c_{\mu\infty}$ 、 $c_{\epsilon_2} = c_{\epsilon_2\infty}$ となる。このとき、無次元パラメータ Re_* は現れない。

5.5 解析方法

解析方法は第 2 章で用いた方法と同様であって、基礎式 (5.52)～(5.55) あるいは (5.61)～(5.64) を適当に離散化し、定常状態に達するまで時間発展をとった。滑面の場合には水路床、自由表面での境界条件は次のようである。

(路床 $y = 0$)

$$U_{fx} = 0, \quad k = 0, \quad \epsilon = 0$$

濃度 C については、粒子が有限の大きさをもつため $y = 0$ で境界条件を与えず、路床より $2 \cdot d$ 離れたところで沈降フラックスと拡散フラックスの平衡条件

$$-\overline{cu_{fy}'} = w_0 C(C-1)$$

として与え、 $y < 2d$ では $C = C_{y=2d}$ とした。

(自由表面 $y = h$)

$$D \frac{\partial U_{fx}}{\partial y} = 0, \quad D \frac{\partial k}{\partial y} = 0, \quad D \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0, \quad -\overline{cu_{fy}'} = w_0 C(C-1)$$

U_{fx} , k , ϵ に対する自由表面での境界条件は対称条件ではなく、 $-\overline{u_{fx}'u_{fy}'} = 0$, k , ϵ の拡散フラックス $= 0$ とするための条件であり、(5.59) 式より $y = h$ において $D = 0$ となるため、これらの条件は自動的に満たされる。自由表面での境界条件は、この他にも Naot・Rodi²³⁾, Lau・Krishnappan²⁴⁾, 柁津・中川²⁵⁾ によっても検討されているが⁸⁾、各方法の優劣は決め難く、本研究ではとりあえず上述の方法を用いる。

粗面の場合、標準型の $k-\epsilon$ モデルを用いるため、路床近傍 $y = \delta$ の境界条件として次の wall function 法を用いる。

(路床近傍 $y = \delta$)

$$\frac{U_\sigma}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y}{k_s} + A_r \right), \quad k_\sigma = \frac{u_*^2}{\sqrt{c_{\mu\infty}}}, \quad \epsilon_\sigma = \frac{u_*^3}{\kappa \delta}, \quad -\overline{cu_{fy}'} = w_0 C(C-1)$$

浮遊砂流の場合、清水流で用いられる wall function 法の適用性が問題となるが、今本・大年が指

摘しているように、粗面上では、路床近傍で浮遊砂流、清水流の流速が一致することから、wall function 法の適用可能性が推察できる。

自由表面上の境界条件は滑面の場合と同じである。

計算にあたっては、水深を路床近傍ほど小さい格子を用いて120分割した。不等格子間隔は次式で定めている。

$$\Delta y(I) = h \cdot \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{I}{N}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{I-1}{N}\right) \right) / \sin^2\frac{\pi}{4}$$

ここに、 $\Delta y(I)$ は路床より I 番目の格子であることを示し、 N は総分割数（今の場合120）である。

5.6 計算結果の考察

(1) 滑面上の流れの特性²⁷⁾

① Coleman の実験結果との比較

図5.2に示したように、Coleman は粒径0.105～0.420mm の砂粒を用いて、滑面上の浮遊砂流の流速分布特性について検討している。その中の Run 9, 20の条件に合せて数値解析を行い、実験結果と比較したのが図5.8, 5.9である。（清水流の流速分布が $x = 0.4$, $A_s = 5.5$ の対数則に従うように求め直した摩擦速度を用いている。）計算に用いた定数を表5.1に示してある。浮遊砂流の場合は、清水流と比べて路床近くで流速がかなり小さくなり、水面に近づくにつれて急なこう配で増加している。計算結果は浮遊砂流のこの特性をよく再現している。また、濃度分布も両者はよく適合している。図5.10には路床のごく近傍の流速分布を示した。Coleman が指摘しているように、浮遊砂流においても $x = 0.4$ の対数則のこう配で増加する領域が存在することがわかる。

上述のように、本研究で示した解析モデルによって、滑面上の浮遊砂流の特性がほぼ再現されることがわかった。次に、路床近傍において浮遊砂流の流速が減少する理由について検討しよう。

② 路床近傍での流速の減少機構

粘性底層内で Reynolds 応力項を無視すれば、運動方程式は次のようになる。

$$\nu \frac{d^2 U_{fx}}{dy^2} - C w_0 \frac{dU_{fx}}{dy} + \frac{g \sin \theta}{1-C} = 0 \quad (5.67)$$

上式中、左辺第2項は固相の沈降により固相が液相に置き換えることによって生ずる応力伝達を示す。この項は、液相の連続式が厳密には $\partial U_{fx} / \partial x_t = \partial w_0 C / \partial y$ となることに起因し、通常は C が小さいことにより無視される。しかし、路床のごく近傍では C がかなり大きくなることが予想される。そこで、この項を無視せずに、図5.11に示した濃度分布を仮定して、 $y = 0$ で $U_{fx} = 0$, $y = h$ で $dU_{fx} / dy = 0$ のもとで (5.67) 式を解くと次のような解が得られる。

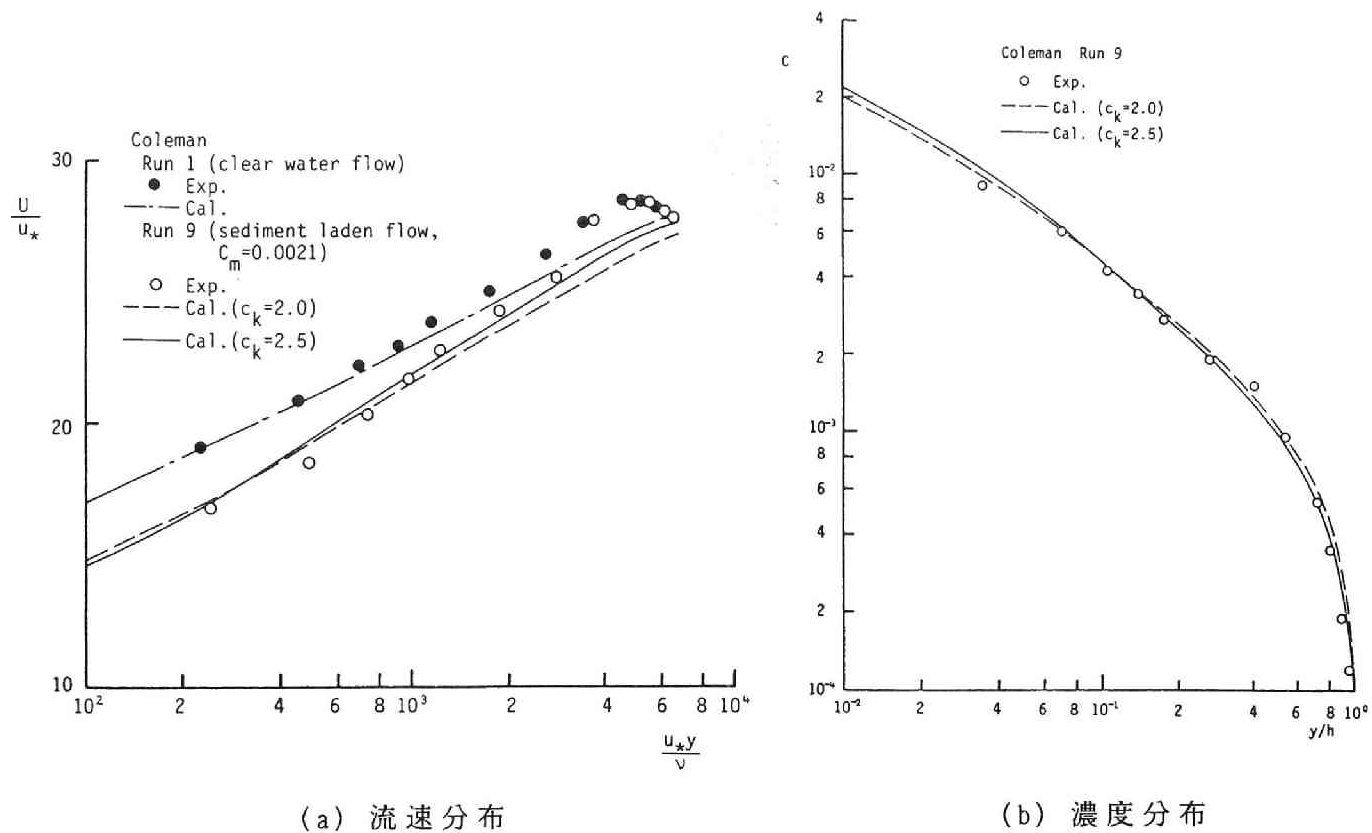
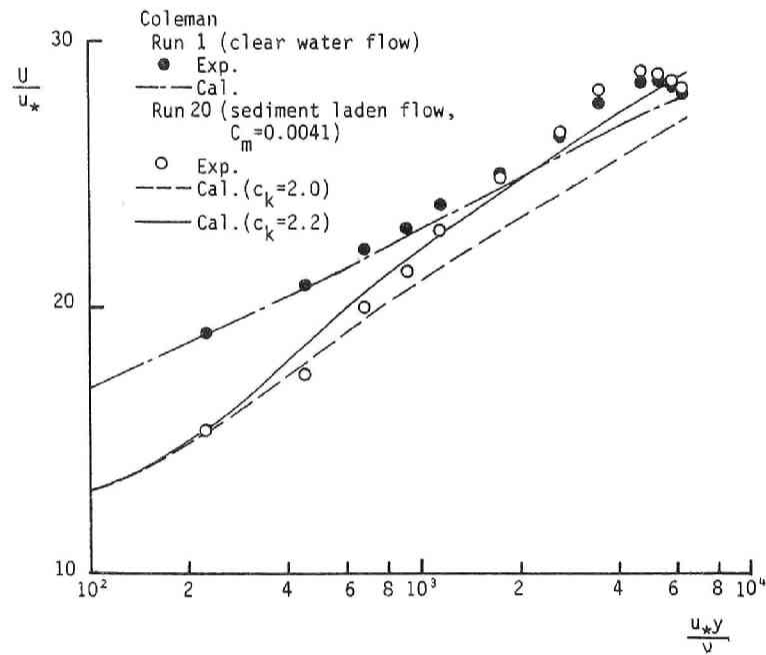
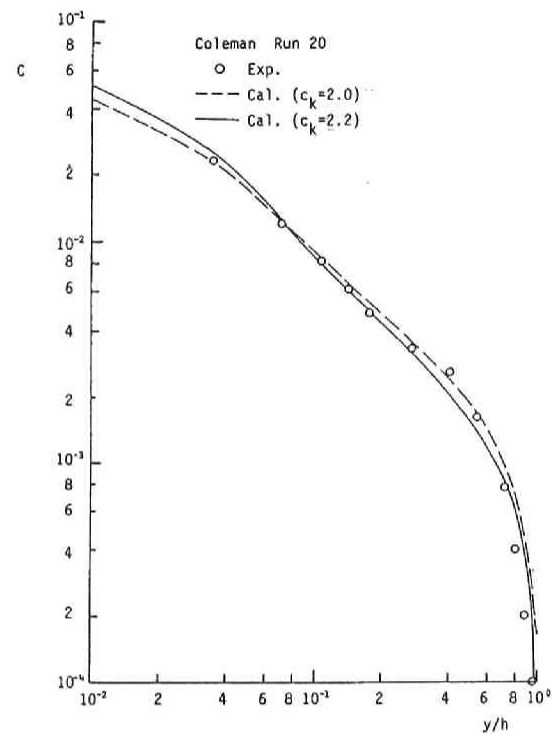


図5.8 Colemanの実験との比較 (Run 9, $d = 0.105\text{mm}$)



(a) 流速分布



(b) 濃度分布

図5.9 Colemanの実験との比較 (Run 20, $d = 0.105\text{mm}$)

表5.1 モデル定数

c_{ϵ_1}	c_{ϵ_2}	c_{ϵ_3}	c_k	σ_k	σ_ϵ
1.44	1.92	3.0	2.0-2.5	1.0	1.3

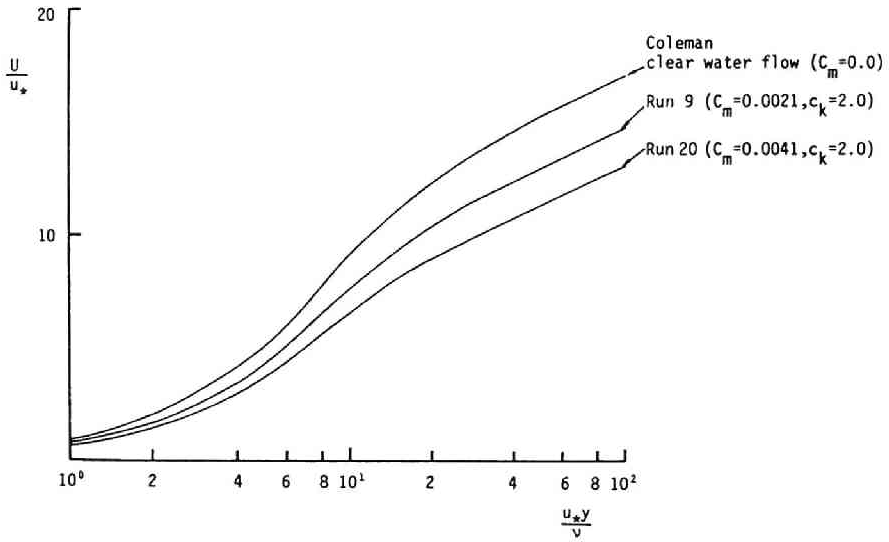


図5.10 路床近傍の流速分布

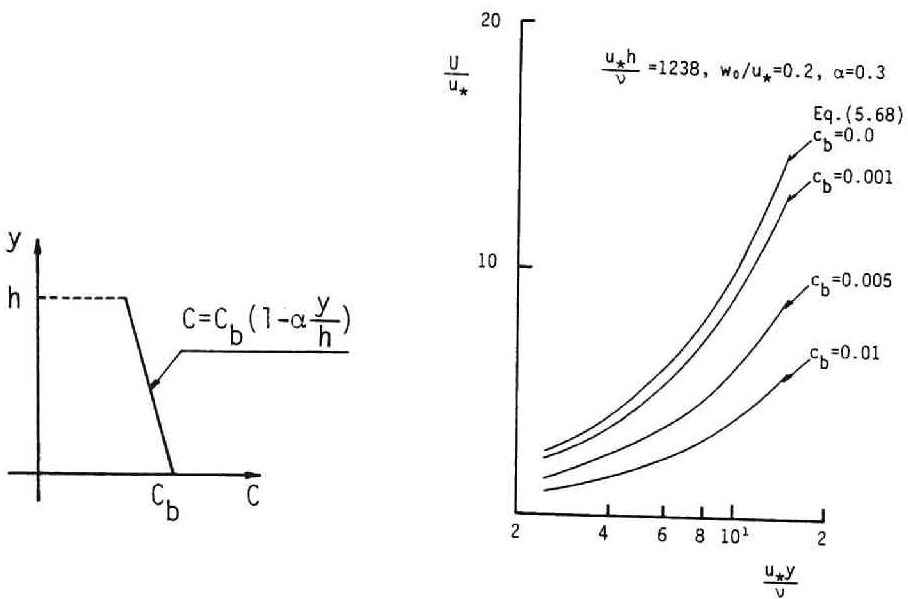


図5.11 概念図

図5.12 (5.68)式の特性

$$U_{rx} = \int_0^h \frac{g \sin \theta}{\nu \exp(Y)(1-C)} dy \cdot \int_0^y \exp(Y) dy - \int_0^y \exp(Y) dy \int_0^y \frac{g \sin \theta}{\nu \exp(Y)(1-C)} dy + \int_0^y \frac{g \sin \theta}{\nu \exp(Y)(1-C)} \int_0^y \exp(Y') dy' dy \quad (5.68)$$

ここに、 Y は次式で定義される。

$$Y = \frac{c_b w_0}{\nu} \left(y - \alpha \frac{y^2}{2h} \right)$$

(5.68) 式を c_b をパラメータとして示したのが図5.12であり、 c_b が増加するとともに流速が減少することがわかる。

③ 流速分布の変化特性と水理量の関係

②で検討した路床近傍での流速の減少が、次式で定義される抵抗係数の増加の原因と考えられる。

$$C_f = 2 \left(\frac{u_*}{U_m} \right)^2 \quad (U_m: \text{水深平均流速}) \quad (5.69)$$

C_f に及ぼす水理諸量の影響について、今本・大年は、Froude 数、浮遊砂濃度を变化させた系統的な実験から Froude 数の減少、浮遊砂濃度の増加とともに C_f が増加すること、また、 C_f に及ぼす Reynolds 数の影響が小さいことを明らかにしている。さらに、浅野は、沈降速度が増加するとともに C_f が増加するとしている。そこで、 C_f に及ぼすパラメータとして清水流の Froude 数、無次元沈降速度 w_0/u_* 、浮遊砂平均濃度をとり上げ、今本・大年の行った実験の水理諸量と同程度の水理諸量のもとで数値計算を試みた。計算条件を表5.2に示した。

表5.2 計算の諸条件（滑面）

	Depth (cm)	Mean Velocity (cm/s)	Slope	Re	Fr	Average Concentration	Mean Sediment Diameter (mm)
Run 1	2.5	120.0	1/75	30000	2.40	0-0.0033	0.15
Run 2	3.8	79.7	1/260	30300	1.31	0-0.0033	0.12-0.15

まず、Run 1での流速分布を図5.13に示す。この図より、 C_m 、 w_0/u_* が増加するほど路床近傍での流速が小さくなっている。これは C_m 、 w_0/u_* の増加とともに路床近傍の濃度が増加し、②で述べた機構により流速が減少するためと考えられる。また、図5.13上には、今本・大年が指摘し、Coleman の実験結果にも見られる y の増加に伴う流速こう配の増大が再現されている。次に、この流速こう配の変化の原因について検討してみよう。流速分布に直接影響する渦動粘性係数の分布を示し

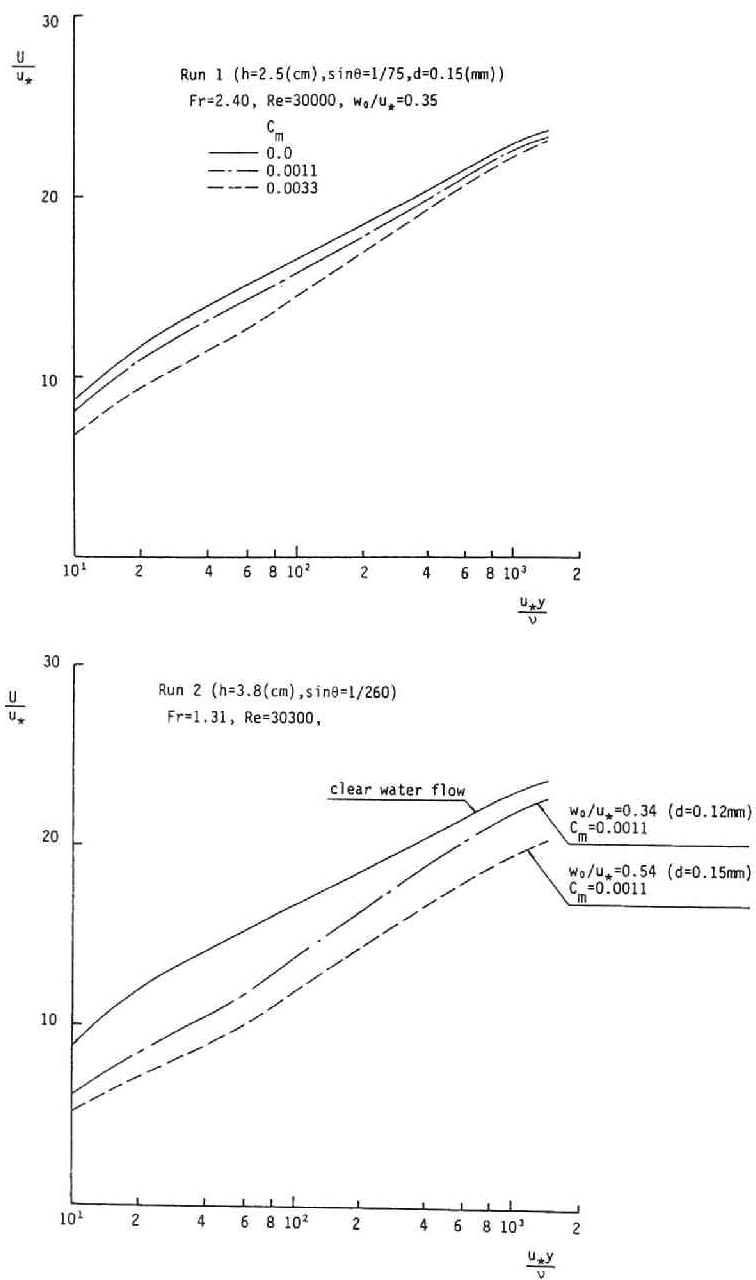


図5.13 流速分布と水理量の関係（滑面）

たのが図5.14である。この図より、浮遊砂流の渦動粘性係数は $y/h > 0.05$ の領域で清水流よりかなり小さく、この渦動粘性係数の減少が流速こう配の増大を引き起こすことになる。図5.15, 5.16に乱れエネルギーと乱れエネルギー散逸率の分布を示した。図中には k -方程式の相互作用項を無視した場合 ($c_k = 0$) も示してある。これらの図より、 k -方程式の相互作用項の効果によって、浮遊砂流の乱れエネルギーは清水流より小さくなり、このことによって渦動粘性係数の減少を引き起こすことがわかる。もう一つの渦動粘性係数を減少させる要因である Richardson 数の分布を図5.17に示した。Richardson 数は自由表面近くで大きくなり、自由表面近傍の渦動粘性係数の減少に寄与することがわかる。このように、流速こう配の増加は、 k -方程式の相互作用項、Richardson 数の効果による渦動粘性係数の減少によって生じることがわかる。

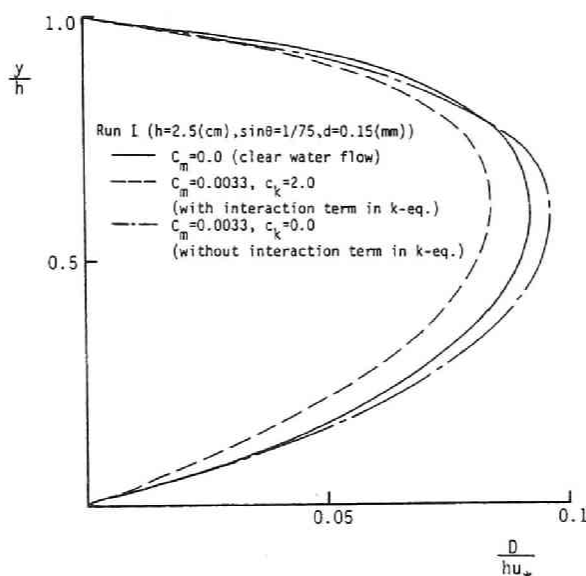


図5.14 渦動粘性係数への相互作用項の影響

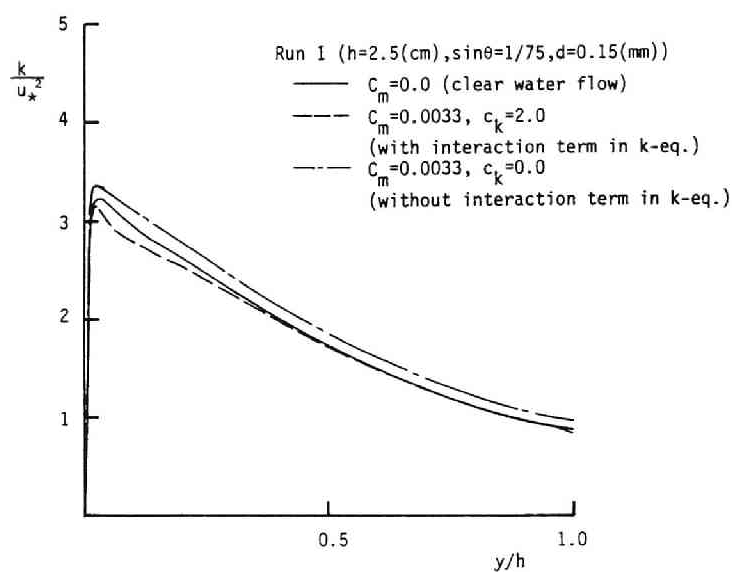


図5.15 乱れエネルギーへの相互作用項の影響

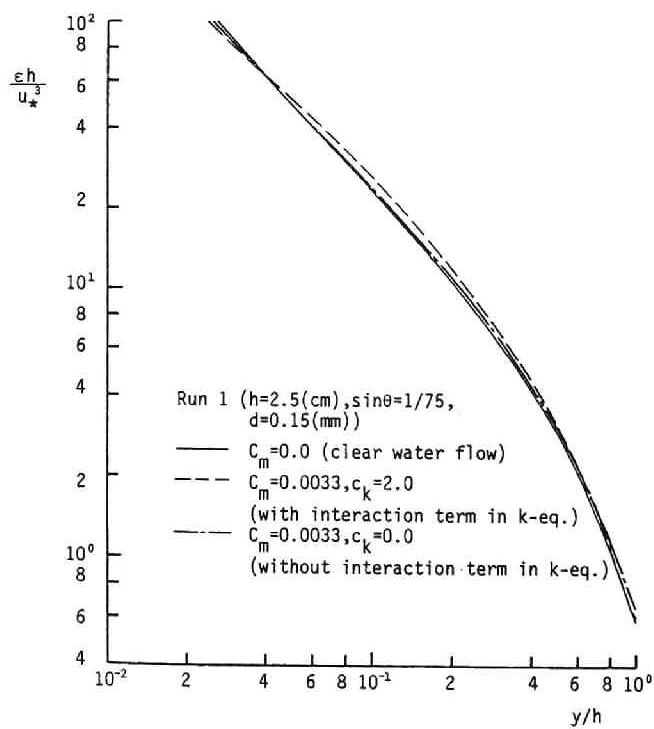


図5.16 乱れエネルギー散逸率への相互作用項の影響

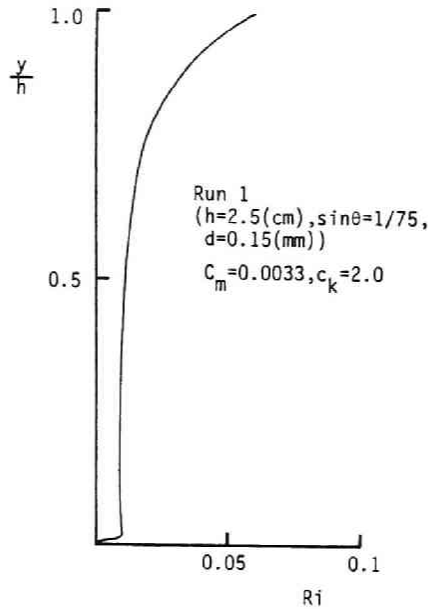


図5.17 Richardson 数の分布形

Arora・Garde・Raju²⁶⁾は、 $C_m(\text{ppm}) \cdot (w_0/u_*)^{1/2}$ が1500～2000の範囲にあるときに、従来の実験結果に適合する流速分布形を、速度欠損則の形式で図示している。 $C_m(\text{ppm}) \cdot (w_0/u_*)^{1/2}$ が1500～2000の範囲にある計算結果を、Arora等の示した図中に示したのが図5.18である。図中には Itakura・Kishi の log-linear 則 (5.4b) 式も欠損則の形式で示したが、計算結果は Arora 等の流速分布に適合している。

図5.19には、抵抗係数 C_f と C_m の関係を示した。図中には今本・大年によって得られた実験結果も示してある。実験に用いられている砂粒径（平均粒径0.159mm）に近い $d = 0.15\text{mm}$ を用いた計算結果は実験結果とよく適合している。図5.20は、 w_0/u_* を一定としたときの C_f と C_m の関係を示している。Froude 数が小さいほど C_f が大きくなることがわかる。

(2) 粗面上の流れの特性

粗面上の浮遊砂流の流速分布は、今本・大年が指摘し、Itakura・Kishi の log-linear 則にも見られるように、路床近傍では清水流と一致し、自由表面に近づくにつれて流速が増大する。前述の基礎式を用いて流速分布特性の再現の可能性を検討するため、Vanoni・Nomicos²⁾の実験条件で計算を行ない、実験結果と比較・検討した。さらに、今本・大年の実験の水理諸量に近い条件でも計算を行ない、抵抗則について検討した。

まず、Vanoni・Nomicos の Run 1, Run 3 について、実験結果と計算結果を比較したのが図5.21, 5.22である。数値計算では、路床近傍の流速の実験値に適合するように相当粗度 k_s を定めた。(Run

1では $k_s = 0.07\text{cm}$, Run 2, $k_s = 3.4\text{cm}$) 図中には, Itakura・Kishi の提案する (5.4) 式も示してある。計算結果は, 実験結果と (5.4) 式にはほぼ適合している。

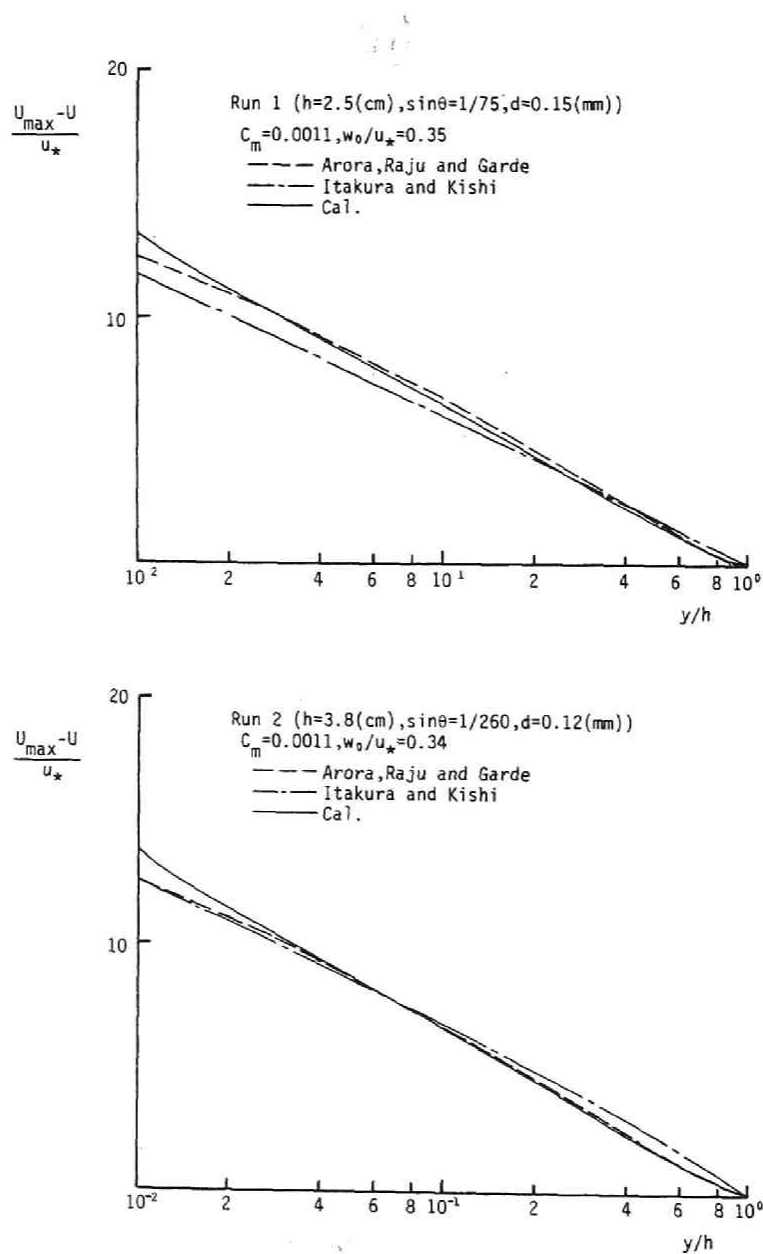


図5.18 流速分布形の検討

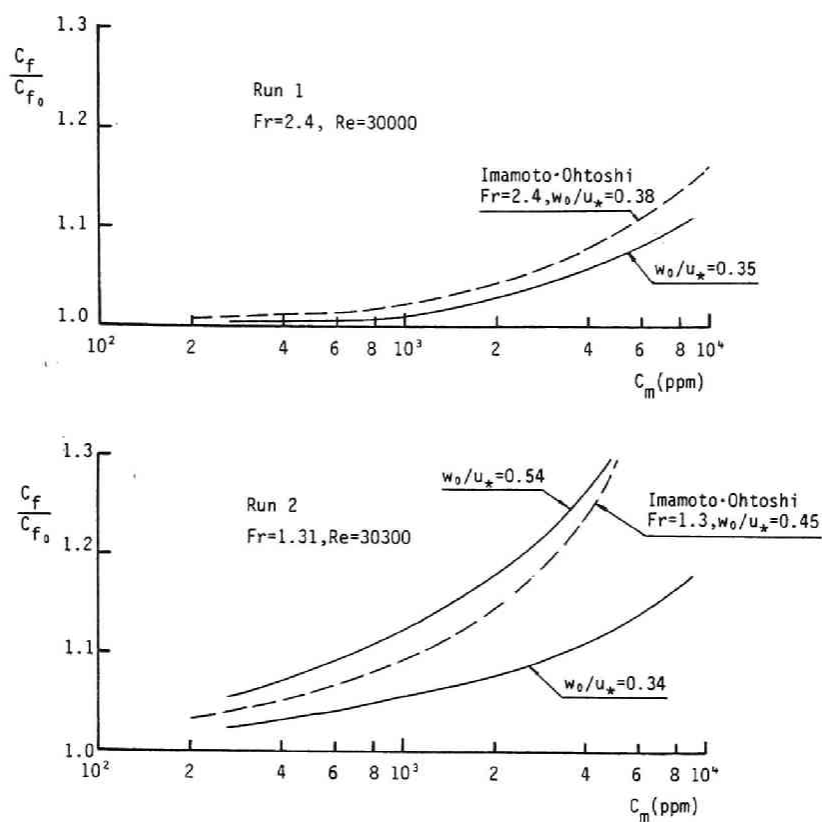


図5.19 抵抗係数と浮遊砂濃度の関係（滑面）

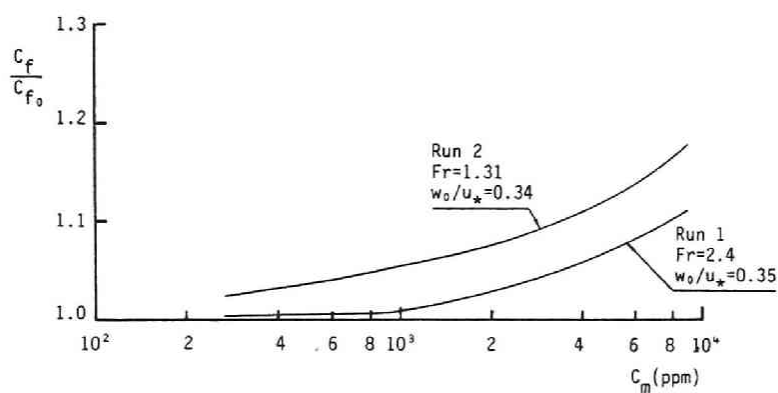


図5.20 抵抗係数への Froude 数の影響

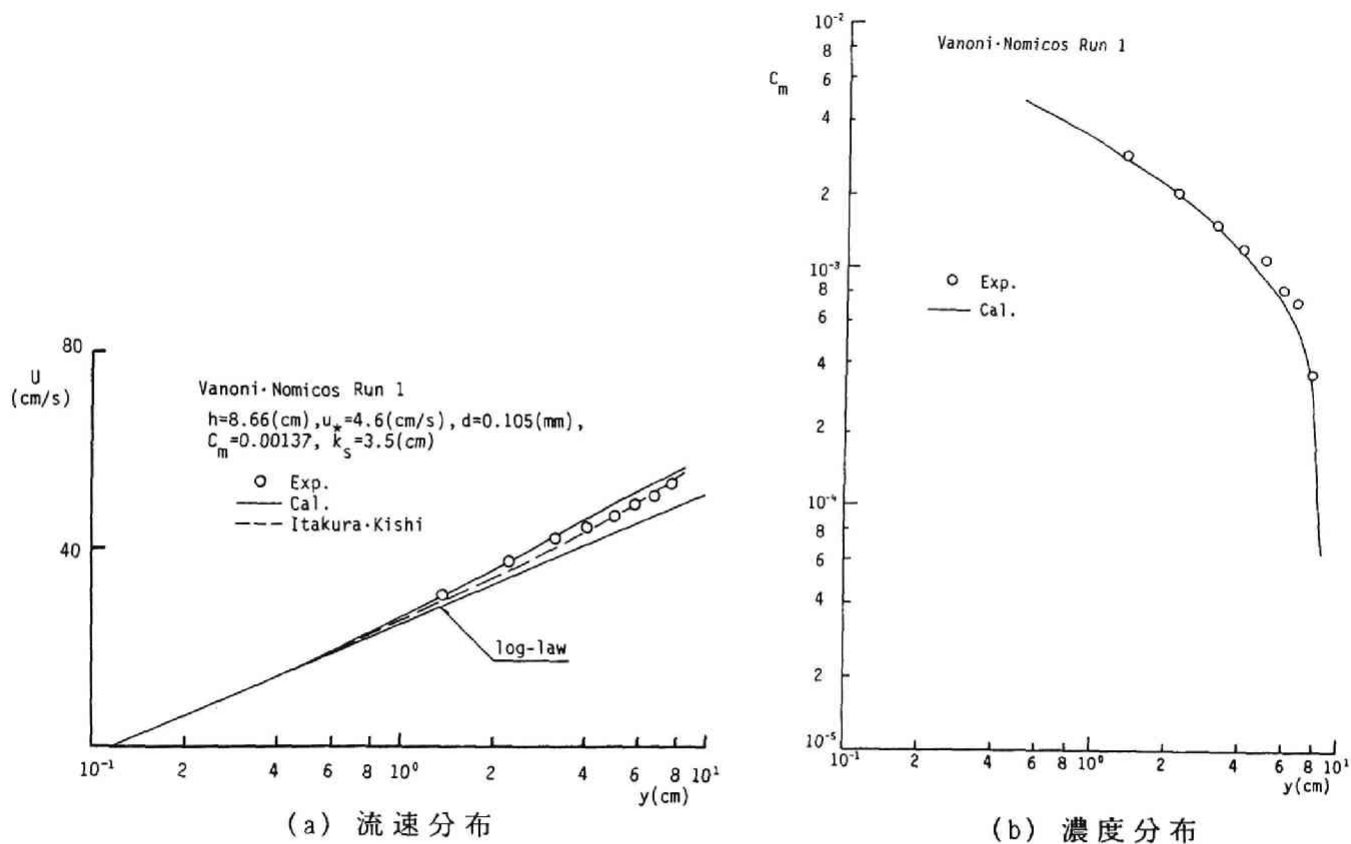
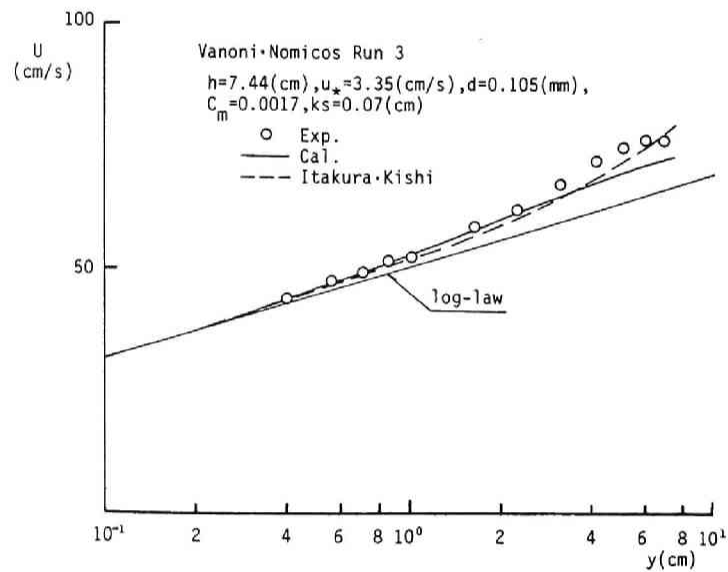
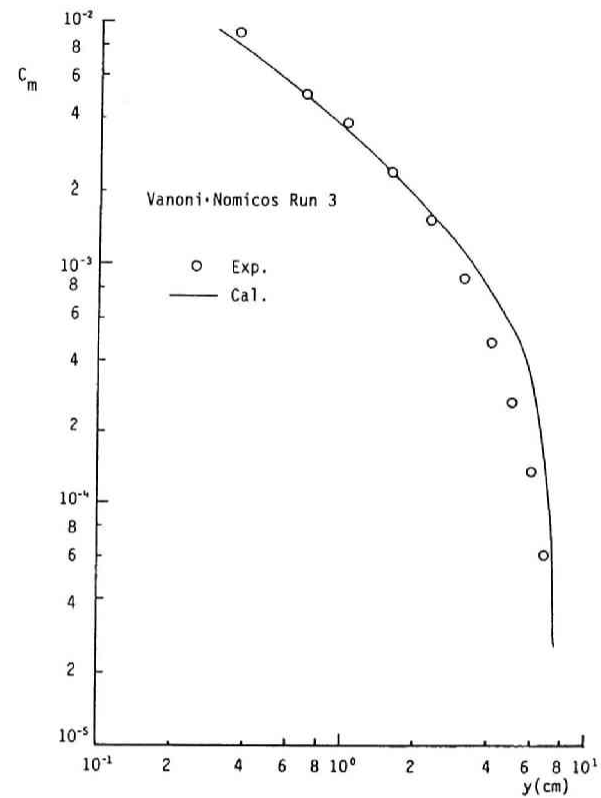


図5.21 Vanoni・Nomikosの実験結果との比較 (Run 1)



(a) 流速分布



(b) 濃度分布

図5.22 Vanoni・Nomikosの実験結果との比較 (Run 3)

次に、表5.3に示した条件で、 C_m をパラメータとして流速分布を示したのが図5.23である。濃度の増加とともに、流速が増加している。この流速分布形の変化は、Vanoni¹⁾の先駆的研究以来 Kármán 定数の減少としてまとめられており、従来の実験結果と適合する理論式として、日野⁶⁾により次式が提案されている。

$$\frac{x_0}{x} = \frac{(1+\beta C_m)}{2} \cdot [1 + \{1 + 4Bx_0(1+\beta C_m)s_1\}^{1/2}] \quad (5.70)$$

ここに、 β , B は定数で、 $\beta = 2$, $B = 13$ である。また、 s_1 は次式で定義される。

$$s_1 \equiv \frac{g(\rho_p/\rho_f - 1)w_0 C_m(h - k_s)}{u_*^3 \ln h/k_s} \quad (k_s: \text{相当粗度})$$

計算結果より x を算定し、(5.70) 式と比較したのが図5.24である。計算結果は (5.70) 式とほぼ適合している。

上述したように、計算結果は粗面上の浮遊砂流の特性をほぼ再現している。しかし、図5.25に示した抵抗係数と浮遊砂濃度の関係を見ると、抵抗係数の Froude 数依存性が十分再現されておらず、路床ごく近傍の流れと浮遊砂の挙動の詳細な考察やモデル定数の再検討を行う必要があるように思われる。

表5.3 計算の諸条件（粗面）

	Depth (cm)	Mean Velocity (cm/s)	Slope	Re	Fr	ks (cm)	Average Concentration	Mean Sediment Diameter (mm)
Run 3	2.5	66.0	1/50	16500	1.33	0.6	0-0.005	0.15
Run 4	3.15	55.3	1/100	17400	1.00	0.6	0-0.003	0.15

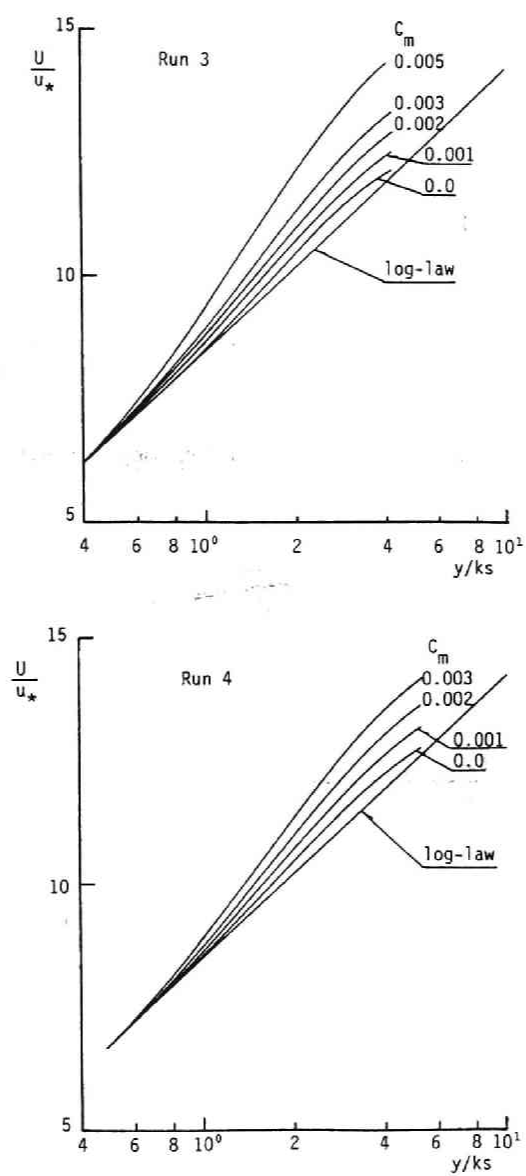


図5.23 流速分布への濃度の影響（粗面）

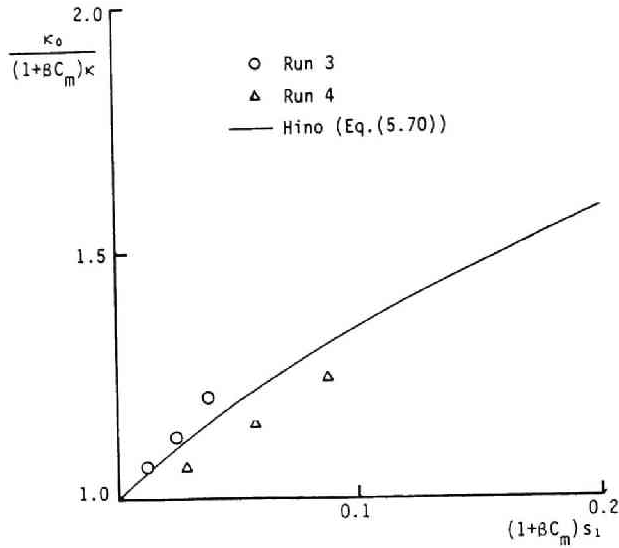


図5.24 Kármán 定数に関する日野の理論との比較

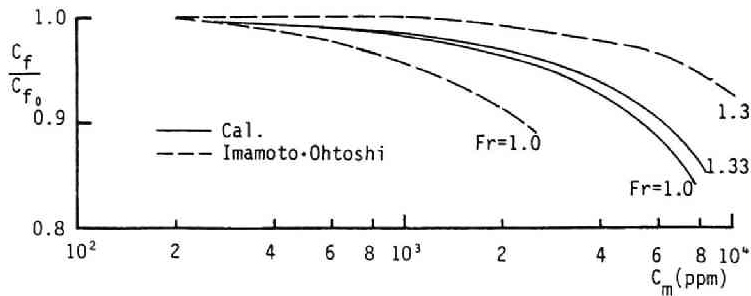


図5.25 抵抗係数と浮遊砂濃度の関係（粗面）

5.7 結語

本章では、開水路流れの浮遊砂流の特性を再現可能なモデルの構成を考察し、その数値解析結果を従来の研究結果と比較することにより、モデルの適合性について検討した。得られた結果をまとめれば次のようになる。

- ① 固相と液相の乱れ速度差を考慮したときの $k-\epsilon$ モデルの構成を検討し、 $k-\epsilon$ 方程式に現れる乱れ速度差に起因する相互作用項を浮遊粒子の運動の解析結果を用いて定式化した。さらに、渦動粘性係数、乱流拡散係数と Richardson 数の関係についても、Launder の方法により検討した。
- ② 解析モデルを、滑面・粗面上の浮遊砂流に適用し、従来の研究結果と比較・検討した。まず、滑面上の特性として、路床近傍で清水流よりも流速が低減すること、路床より水面に近づくにつれて

流速こう配が急増することが数値解析によって再現された。路床近傍での流速の低減は、砂粒子の沈降により砂粒子が水と置き換えるために生ずる応力伝達が原因の一つと考えられた。また、流速こう配の増大は、 k -方程式中の乱れ速度差に起因する相互作用項の効果による乱れエネルギーの減少と、Richardson 数の効果が引き起す渦動粘性係数の減少が原因と推察された。滑面上の計算結果は、従来の実験結果ともほぼ適合した。

- ③ 粗面上の流れについては、流速は清水流よりも大きく、路床より水面に近づくにつれて流速こう配が増加するという特性が、数値解析結果において再現されている。この流速こう配の増加を Kármán 定数の減少として定式化した日野の理論式に、計算結果はほぼ適合した。しかし、抵抗係数の Froude 数依存性が十分再現されず、粗度のごく近傍の流れと浮遊砂の挙動やモデル定数の再検討が必要と考えられた。

参考文献

- 1) Vanoni, V. A. : Transportation of suspended sediment by water, Tran. ASCE, 111, pp. 67-102, 1964.
- 2) Vanoni, V. A. and Nomicos, G. N. : Resistance properties of sediment-laden stream, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol. 85, HY5, 1959.
- 3) Task Committee : Sediment transportation mechanics, suspension of sediment, progress report, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol. 89, HY5, pp. 45-77, 1963.
- 4) 志村博康：流砂ある水流の諸特性について，土木学会論文集，第46号，1957.
- 5) 室田 明：浮遊砂濃度と流速分布との関連について，土木学会誌，第38巻11号，pp. 8-11, 1953.
- 6) 日野幹雄：固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化，土木学会論文集，第92号，pp. 11-22, 1963.
- 7) Itakura, T. and Kishi, T. : Open channel flow with suspended sediment, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol. 106, HY8, pp. 1325-1343, 1980.
- 8) 今本博健，大年邦雄：固液混相開水路流れの水理特性に関する研究(1)，京都大学防災研究所年報 第22号 B2, pp. 453-468, 1979.
- 9) 今本博健，大年邦雄：固液混相開水路流れの水理特性に関する研究(2)，京都大学防災研究所年報 第23号 B2, pp. 373-392, 1980.
- 10) Coleman, N. L. : Effects of suspended sediment on the open-channel velocity distribution, Water Resources Research, Vol. 22, No. 10, pp. 1373-1384, 1986.
- 11) Taggart, W. C., Yermoli, C. A., Montes, S. and Ippen, A. T. : Effects of sediment size and gradation on concentration profiles in turbulent flow, MIT Rep. 152, Mass. Inst. Technol., Cambridge, 1972.

- 12) Celic, I. and Rodi, W. : Mathematical modelling of suspended sediment transport in open channels, Proc. 21st Congress of IAHR, Melbourne, Australia, pp. 534-538, 1985.
- 13) Fukushima, Y. : Analysis of non-uniform flow with suspended sediment by using $k-\epsilon$ turbulence model, Proc. 3rd Int'l Symp. Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, pp. 577-584, 1988.
- 14) 細田 尚, 余越正一郎 : 混相流での $k-\epsilon$ モデルの構成, 第31回水理講演会論文集, pp. 581-586, 1987.
- 15) Jones, W. P. and Launder, B. E. : The prediction of laminarization with two-equation model of turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp. 301-314, 1972.
- 16) Murry, J. D. : On the mathematics of fluidization, Part. 1., Fundamental equations and wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 21, pp. 465-493, 1965.
- 17) Danon, H., Wolfshtein, M. and Hetsroni, G. : Numerical calculation of two-phase turbulent round jet, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 3, pp. 223-234, 1977.
- 18) Launder, B. E. : On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum, J. Fluid Mech., Vol. 67, pp. 569-581, 1975.
- 19) Gibson, M. M. and Launder, B. E. : On the calculation of horizontal turbulence free shear flows under gravitational influence, J. Heat Transfer, Tran. ASME, 98c, pp. 81-87, 1976.
- 20) Smith, J. D. and McLean, S. R. : Spatially averaged flow over a wavy surface, J. Geophysical Research, Vol. 82, pp. 1735-1746, 1977.
- 21) 岩佐義朗, 細田 尚, 坂井伸一 : 滑面上の浮遊砂を有する開水路流れの抵抗則について, 第33回水理講演会論文集, pp. 595-600, 1989.
- 22) Moierus, D. and Werther, J. : Berechnung der Sinkbewegung kugelliger Teilchen in einem vertikal pulsierenden Strömungsfeld, Chemie-Ingenieur-Technik, Vol. 40, pp. 522-524, 1968.
- 23) Naot, D. and Rodi, W. : Calculation of secondary currents in channel flow, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol. 108, HY8, pp. 948-968, 1982.
- 24) Lau, Y. L. and Krishnappan, B. G. : Ice cover effects on stream flows and mixing, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol. 107, HY10, pp. 1225-1242, 1981.
- 25) 祢津家久, 中川博次 : 修正 $k-\epsilon$ モデルによる開水路乱流の数値計算, 土木学会論文集, No. 387/II-8, pp. 125-134, 1987.
- 26) Arora, A. K., Ranga Raju, K. G. and Garde, R. J. : Resistance to flow and velocity distribution in rigid boundary channels carrying sediment-laden flow, Water Resources Research, Vol. 22, No. 6, pp. 943-951, 1986.
- 27) 岩佐義朗, 細田 尚, 綾 史郎, 坂井伸一 : 浮遊砂を有する滑面上の開水路流れの流速分布特性, 第3回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp. 595-598, 1989.

結 論

本研究は、乱流状態での水の流れと、その中で物質・熱の拡がりを検討する上で重要となる乱流拡散係数、渦動粘性係数に関する諸問題について、基本的な現象を例にとり検討してきた。これらの問題に対処するための方法は本研究で述べてきたように数多くあり、対象とする現象、要求される精度などから決められるものであろう。本研究は、その選択に対しての基礎的な資料を与えるものと考えられる。

本研究で得られた主な結果を要約すると次のようになる。

1. 第1編では乱流拡散係数に関する諸問題について理論的、実験的に検討し、次のような知見を得た。

(1) 第1章では単純な乱流場のモデルを設定し、乱流拡散係数が Euler 的乱れ特性量によりどのように構成されるかを考察した。得られた結果は次のようになる。

① Taylor の拡散理論と Corrsin の関係式を連立することにより、Lagrange 的時間スケールと Euler 的乱れ特性量の関係を検討した。その際、乱れの空間的積分スケール L_E 、乱れ強さ $\langle u^2 \rangle$ 、流下座標系での乱れの時間的積分スケール T_0 で構成される無次元量 $\alpha = L_E / \sqrt{\langle u^2 \rangle} T_0$ を導入し、Lagrange 的時間スケール T_L と α の関係を図1.7に示した。 $\alpha > 10$ で $T_L / T_0 \doteq 1$ と考えることができる。

② 用いた乱流場のモデルでは固定点での計測より得られる時間的積分スケール T_E と T_0 の比 T_E / T_0 が無次元量 $\beta = U_0 T_0 / L_E$ (U_0 : 移流速度) の関数になるため、 T_L / T_E が α と β あるいは $U_0 / \sqrt{\langle u^2 \rangle}$ と β の関数となることを示し、 β をパラメータとして T_L / T_E と $U_0 / \sqrt{\langle u^2 \rangle}$ の関係を図1.9に示した。

③ 主流方向の乱流拡散係数に関する従来の実験結果は、図1.9に示した解析結果にほぼ適合する。一方、主流に直交する方向の乱流拡散に関しては、 T_L / T_0 と $L_E / \sqrt{\langle u^2 \rangle} T_0$ の関係を示した図1.7を用いる必要がある。図1.7と Baldwin・Mickelson の実験結果を比較した結果、両者はほぼ適合した。ただし、この関係を用いるには計測の困難な T_0 が必要であり、実際的な適用が難しい。また、主流方向とそれに直交する方向を別々に取り扱っているため、両者の乱流拡散係数の関係も明らかでない。このような点を考慮して、第2章では本章の方法の二次元場への拡張を試みた。

(2) 第2章では、第1章で検討した乱流拡散係数と Euler 的乱れ特性量の関係についての解析法を二次元場に拡張することにより、主流方向と主流に直交する方向の乱流拡散係数の比 D_x / D_z が異方性のパラメータ $\langle u^2 \rangle / \langle w^2 \rangle$ と関係づけられることを示した。本研究で得られた関係式は、

$$\frac{D_x}{D_z} = \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle w^2 \rangle} \cdot \left(0.2 + 0.8 \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle w^2 \rangle} \right)$$

である。上式は、壁面に直交する方向と接する方向の乱流拡散係数に関する従来の実験結果には適合することが示された。さらに上式は、第2編第2章において応力モデルを用いた乱流拡散係数の推定に応用される。

- (3) 第1, 2章で示したような方法は、濃度分布の資料が得にくい場合に有用と考えられるが、濃度分布の資料が得られる場合には濃度分布より乱流拡散係数を算定し、水理量との関係をあらかじめ求めておくことが考えられる。そこで第3章では、開水路流れの中に点源として連続的に放出された物質の水路幅方向の乱流拡散係数と水理量の関係について考察し次のような結果を得た。

- ① 点源からの流下距離の増加とともに濃度分布は水深方向に一樣となり、その領域では、濃度分布の特性量（濃度分布形の分散 σ_z^2 , 規格化ピーク濃度）は (3.20) 式に従うようになる。
- ② 水路幅方向の乱流拡散係数 D_z/hu_* と U/u_* との関係を示した図3.10, 3.11をみると粗・滑遷移の領域が確認され、粗面と滑面での定性的な違いがわかる。滑面では D_z/hu_* は U/u_* のほぼ -2 乗で減少している。粗面でも D_z/hu_* は U/u_* とともに減少する傾向を示すが滑面ほど明確でなく、全体として $0.1 \sim 0.2$ の範囲でばらついている。
- ③ そこで、滑面の実験結果について、 D_z/hu_* と Reynolds 数の関係を図3.12に示した。 D_z/hu_* は Reynolds 数のほぼ $-1/3$ 乗で減少している。粗面では、著者等の実験結果を用いて D_z/hu_* と相対粗度 d/h の関係を示した。 D_z/hu_* は d/h の増加とともに線形に増加している。

- (3) 第4章では第3章で時間平均濃度の挙動がある程度明らかになったので、同一の場での濃度変動の拡散過程について乱流モデルを構成する $\overline{c'^2} - \epsilon_c$ 方程式を用いて検討した。まず ϵ_c 方程式について次のような知見を得た。

- ① 第2編第1章で述べる $k-\epsilon$ モデルと同様に、Kármán-Howarth 方程式に対応する濃度変動の空間相関係数 $R_{c,c}$ を規定する関係式に相関係数の相似性の仮定を用いて、 ϵ_c 方程式の散逸項について次式を得た。

$$\frac{d\epsilon_c}{dt} = -\frac{(\delta+1)+\frac{2}{3}}{\delta+1} \frac{\epsilon_c^2}{c'^2} - \frac{c_{\epsilon_2}}{3} \frac{\epsilon_c \epsilon}{k} \quad (4.16)$$

- ② 上式の右辺には $k-\epsilon$ 定数の一つである c_{ϵ_2} を含んでいる。また、 δ は濃度変動のスペクトルの低波数領域の特性を表すパラメータであり、 $\frac{(\delta+1)+2/3}{\delta+1}$ は正の δ に対して1から $5/3$ の間の値をとる。

- ③ 次に、 ϵ_c 方程式の生成項

$$-4\lambda \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial C}{\partial x_i}}$$

について若干の考察を加えた。すなわち、長さのスケールとして $k^{3/2}/\epsilon$ と $(\overline{c'^2}/\epsilon_c)^{3/2}\epsilon^{1/2}$ を用いたとき、次のようにモデル化される。

$$L = \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \rightarrow -4\lambda \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial C}{\partial x_i}} = c_{\epsilon c} (-\overline{u_i' c'}) \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial C}{\partial x_i} \quad (4.25a)$$

$$L = \left(\frac{\overline{c'^2}}{\epsilon_c}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2} \rightarrow -4\lambda \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial C}{\partial x_i}} = c_{\epsilon c} (-\overline{u_i' c'}) \frac{\epsilon_c}{\overline{c'^2}} \frac{\partial C}{\partial x_i} \quad (4.25b)$$

これらの考察を基に、開水路流れの中に連続的に点源として放出された物質の濃度変動の解析を行い、実験結果と比較した。その結果、 ϵ_c —方程式の生成項の表示として (4.25a) 式を用いて、濃度変動強さ $\overline{c'^2}$ の減衰過程と水路方向の分布形がほぼ再現できた。用いた $c_{\epsilon c}$ の範囲は 5～7 である。(4.25a) 式は、 ϵ —方程式の浮力項のモデル化に適用できることを指摘した。さらに、 ϵ_c —方程式の生成項と散逸項の平衡条件から Launder が用いている $\overline{c'^2}$ の簡易的な表示式を導き、定数の意味を明らかにした。

これらの結果は、密度流での乱流拡散係数に関する検討にさいして、補助的な役割をもっている。

2. 第2編では、乱流モデルの構成についてまとめ、その後に水理解析への適用例を示している。まず、第1編で考察してきた乱流拡散係数を乱流モデルを用いて評価する方法を検討した。次に、流れに影響を与えない物質だけでなく、空間的に密度が一樣でない場合や浮遊砂のように流れに完全には追従しない場合の乱流拡散現象を考察した。

- (1) 第1章では乱流モデルの概要についてまとめた。まず減衰する一様等方性乱流場の理論と乱流モデルとの関係を検討した。次に、乱流モデルの代表的なものとして、応力モデルとその特殊な場合と考えられる k — ϵ モデルを概説した。 k — ϵ モデルは、水理量の変化が一方向に卓越する領域で有効と考えられ、基礎式系が比較的簡潔であることから、実用的でもある。しかし、第2章で考察するような、乱流構造の三次元性を考慮する必要がある場合には応力モデルを用いる必要があり、対象とする現象に応じて使い分ける必要があると思われる。
- (2) 第2章では、応力モデルを用いて開水路流れの乱れ特性量を推定し、得られた結果より空間の三方向の乱流拡散係数を推定する方法について検討した。得られた結果を示すと次のようである。
 - ① Launder・Reece・Rodi が提案している応力モデルを開水路流れの流速分布の解析に適用した。その際、 p — s 項への自由表面の影響を考慮する方法として、 p — s 項に減衰関数を乗じる方法を用いた。

- ② 対数則に適合している計算結果を用いて、乱れ特性量の水深方向の分布について検討した。
計算結果は祢津、浅野の示している実験結果を概ね再現することができる。
- ③ 得られた乱れ特性量の計算結果と、第1編第1, 2章で検討した乱流拡散係数と Euler 的乱れ特性量の関係を用いて、空間の3方向の乱流拡散係数分布を求め、従来の実験結果から検討した。用いた関係式は次のようである。

$$D_x = c_x \frac{\overline{u^2 k}}{\epsilon} \quad (c_x = 0.5 \sim 0.7)$$

$$D_y = \frac{\overline{v^2}}{u^2} \cdot \frac{D_x}{(0.2 + 0.8 \overline{u^2/v^2})}$$

$$D_z = \frac{\overline{w^2}}{u^2} \cdot \frac{D_x}{(0.2 + 0.8 \overline{u^2/w^2})}$$

本章の結果では第1編第3章で検討した乱流拡散係数と Reynolds 数などの関係が再現できず、より高精度のモデルの検討が必要と考えられる。

- (3) 第3章では、surface jet 中の水温あるいは密度分布の拡散過程を検討する前に、周囲と同じ密度で放出される surface jet に対して $k-\epsilon$ モデルの適用を試みた。得られた結果を以下に示す。

- ① まず、 $k-\epsilon$ モデルを turbulent jet に適用することの有効性を示すため、水理量の分布形の相似性が仮定できる領域での jet の中心軸に沿う U_m , k_m , ϵ_m と流速分布の幅 b の減衰過程を検討した。その結果二次元 jet, Round jet に対して次のような特性が得られた。

$$\left. \begin{array}{l} \text{(二次元 jet)} \quad U_m \propto x^{-1/2} \\ \quad \quad \quad b \propto x^1 \\ \quad \quad \quad k_m \propto x^{-1} \\ \quad \quad \quad \epsilon_m \propto x^{-5/2} \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(Round jet)} \quad U_m \propto x^{-1} \\ \quad \quad \quad b \propto x^1 \\ \quad \quad \quad k_m \propto x^{-2} \\ \quad \quad \quad \epsilon_m \propto x^{-4} \end{array} \right\} \quad (3.28)$$

U_m , b に関しては従来の実験結果と同一の結果が得られている。上記の結果を用いると、渦動粘性係数で定義された Reynolds 数 (Re_D)

$$Re_D = \frac{U_m b}{c_\mu \frac{k_m^2}{\epsilon_m}}$$

は一定となる。また、 $\sqrt{k_m}/U_m$ も一定となる。(計算結果では $\sqrt{k_m}/U_m \doteq 0.26$ となっている。)

- ② これらの知見を基に、周囲流体と同一の密度をもって放出される surface jet の数値解析を行った。その際、放出口の水理量に関する無次元パラメータ

$$\alpha = \frac{\epsilon_0 h_0}{U_0^3}, \quad \beta = \frac{k_0}{U_0^2}, \quad Fr_0 = \frac{U_0}{\sqrt{g h_0}}, \quad Re_0 = \frac{U_0 h_0}{\nu}$$

を導入し、その値を変化させて数値解析を行った。計算結果は、 U_m , b に関しては放出口からの距離の増加に伴い従来の二次元 jet に関する実験結果に漸近し、 k_m , ϵ_m は、概ね (3.14) 式に示したべきで減少する。また、 k , ϵ は一度増加し、極大値をとってから減少する分布形が得られた。渦動粘性係数の分布形も同様である。

- (4) 第 4 章では、周囲流体より小さい密度で放出される buoyant surface jet に対して、Launder の密度流に関する研究を考慮した $k-\epsilon$ モデルの適用を試み、実験結果と比較した。実験結果に見られる水温分布の空間的な成層化過程について、Richardson 数、乱流拡散係数分布の変化との関連から詳細な考察を行っている。その結果、成層化の要因の一つとして、渦動粘性係数と乱流拡散係数に及ぼす Richardson 数の効果の違いが考えられた。
- (5) 第 5 章では、乱流中の固体粒子の乱流拡散現象として、浮遊砂を有する開水路流れを取り上げた。まず浮遊砂流の特性を再現可能なモデルの構成を考察し、その数値解析結果を従来の研究結果と比較・検討することによりモデルの適合性について考察した。得られた結果は次のようである。
- ① 固相と液相の乱れ速度差を考慮したときの $k-\epsilon$ モデルの構成を検討し、 k -方程式に現れる乱れ速度差に起因する付加項を、浮遊粒子の運動の解析結果を用いて次のようにモデル化した。

$$\overline{u_{f_i}^2} \left(1 - \frac{\overline{u_{f_i}'} \overline{u_{p_i}'}}{\overline{u_{f_i}^2}} \right) = c_k k \frac{1-f}{ec_L Re_T (\nu/\sqrt{k} d)^2 + 1} \quad (5.50)$$

さらに、渦動粘性係数、乱流拡散係数と Richardson 数の関係についても Launder の方法により検討し、次式を得た。

$$(\text{渦動粘性係数}) \quad \frac{D}{D_0} = 1 - \frac{Ri}{Ri_c} \quad (Ri_c = 0.4)$$

$$(\text{乱流拡散係数}) \quad D_p = 1.2D$$

- ② 解析モデルを滑面・粗面上の浮遊砂流に適用し、従来の研究結果と比較・検討した。まず、滑面上の特性として、路床近傍で清水流よりも流速が低減すること、路床より水面に近づくに

つれて流速こう配が急増することが数値解析によって再現された。路床近傍での流速の低減は、砂粒子の沈降により砂粒子が水と置き換えるために生ずる応力伝達が原因の一つと考えられた。また、流速こう配の増大は、 k -方程式中の乱れ速度差に起因する相互作用項の効果と、Richardson 数の効果が引き起す渦動粘性係数の減少が原因と推察された。滑面上の計算結果は、Coleman の実験結果、Arora・Garde・Raju の示した流速分布形にほぼ適合した。

- ③ 粗面上の流れについては、流速は清水流よりも大きく、路床より水面に近づくにつれて流速こう配が増加するという特性が再現された。この流速こう配の増加を Kármán 定数の減少として定式化した日野の理論式に計算結果はほぼ適合した。しかし、抵抗係数の Froude 数依存性が十分再現されず、粗度のごく近傍の流れとそこでの浮遊砂の挙動、モデル定数などの再検討が必要と考えられた。

以上、開水路流れの中での物質・熱の乱流拡散現象に関して、基本的な現象を例にとり考察してきた。本研究の成果が、水工学上の問題を検討する際に、数学モデルの選定とそれに付随する各種係数の設定、解析結果の評価に関する基礎的な資料となれば幸いです。

最後に、本研究を進めるにあたって、終始懇切な御指導を賜った京都大学教授、岩佐義朗先生に深く感謝の意を表します。

また、著者が広島大学に勤務中、本研究の遂行にあたり多大な御助言を賜りました広島大学教授、金丸昭治先生、余越正一郎先生に深く感謝致します。

さらに、研究の細部にわたり御助言を賜りました京都大学助教授、井上和也先生、快く討議に応じて下さった京都大学講師・綾史郎先生、中部大学助教授・松尾直規先生、西松建設・多田彰秀氏に深く感謝致します。

実験、数値計算の資料の整理に当り協力下さった京都大学工学部土木工学教室河川工学研究室、広島大学工学部第4類地域環境工学講座河海工学研究室的の諸兄に厚く感謝致します。

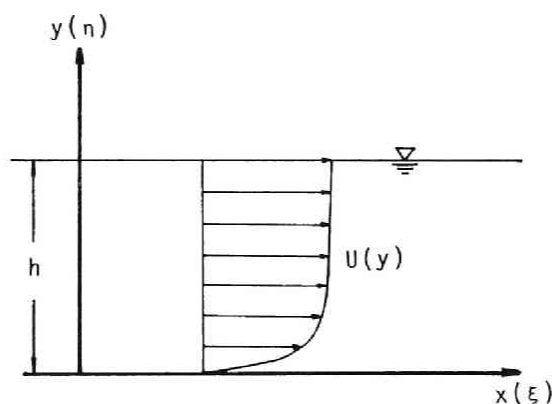
付録-A 第1編 (1.19) 式による移流分散現象の解析¹⁾

第1編 (1.19) 式を再記すると次のようになる。

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x, t) u(x', s) \rangle C(x, t | x, s) C(x', s | x_0, t_0) dx dx' ds \quad (\text{A-1})$$

Chatwin²⁾は、この式を用いて円管内の点から放出されたトレーサの、放出初期の挙動を検討している。(A-1)式は、流速分布の流れの方向の一様性が仮定できるとき簡単化され、さらに初期放出点 x_0 に関して積分することにより、瞬間的に面源として放出されたトレーサの挙動を記述する Dewey・Sullivan³⁾の式が得られることを示す。

対象としている流れを図A.1に示した。簡単のため二次元流れを考え、時間平均流速 U は x 方向に変化しないとする。このとき $u(x, t)$ は次のように表せる。



図A.1 座標系

$$u(x, t) = U(y) + u'(x, t) \quad (\text{A.2})$$

これより、 $\langle u(x, t) u(x', s) \rangle$ は次のようになる。

$$\langle u(x, t) u(x', s) \rangle = U(y) U(y') + \langle u'(x, t) u'(x', s) \rangle \quad (\text{A.3})$$

上式を用いて、(A.1) 式は次のように記述できる。

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle = \int_{t_0}^t \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (U(\eta) U(\eta') + \langle u'(\alpha, t) u'(\alpha', s) \rangle) \cdot$$

(A.4)

$$\cdot h^4 \cdot C(\alpha, t | \alpha', s) C(\alpha', s | \alpha_0, t_0) d\xi' d\eta' d\xi d\eta ds$$

ここに、 ξ , η , α は水深 h を用いて無次元化された座標で、次式で定義される。

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \alpha = (\xi, \eta)$$

さらに、(A.4) 式で $C \cdot h^2$ を C と再定義する。このように定義された C は規格化条件

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} C d\xi d\eta = 1$$

を満たす。

(A.4) 式で、 $\langle u'(\alpha, t) u'(\alpha', s) \rangle$ の項が $U(\eta) U(\eta')$ の項に比べて無視できるような場合を考える。そのとき、(A.4) 式は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle &= \int_0^t \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} U(\eta) U(\eta') C(\xi, \eta, t | \xi', \eta', s) \cdot \\ &\quad \cdot C(\xi', \eta', s | \xi_0, \eta_0, t_0) d\xi' d\eta' d\xi d\eta ds \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

次のような積分量を考えよう。

$$C_0(\eta, t | \xi', \eta', s) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi, \eta, t | \xi', \eta', s) d\xi \quad (\text{A.6})$$

これは、Aris のモーメント方程式⁴⁾の 0 次解に対応するものである。

$C_0(\eta, t | \xi', \eta', s)$ は流れの ξ 方向の一様性より ξ' に独立となる。そのとき、(A.5) 式は次のように C_0 を用いて表せる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle &= \int_0^t \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} U(\eta) U(\eta') C_0(\eta, t | \eta', s) \cdot \\ &\quad \cdot C(\xi', \eta', s | \xi_0, \eta_0, t_0) d\xi' d\eta' d\eta ds \\ &= \int_0^t \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} U(\eta) U(\eta') C_0(\eta, t | \eta', s) \\ &\quad C_0(\eta', s | \eta_0, t_0) d\eta' d\eta ds \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

上式を η_0 に関して 0 から 1 まで積分すれば次式が得られる。

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{\langle X^2(t) \rangle} = \int_0^t \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} U(\eta) U(\eta') C_0(\eta, t-s | \eta', 0) d\eta' d\eta ds \quad (\text{A.8})$$

——は水深平均を表す。これが³⁾Dewey・Sullivan が用いている式であり、 C_0 として拡散方程式

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} = D_y \frac{\partial^2 C_0}{\partial y^2} \quad (\text{A.9})$$

の瞬間源の解

$$C_0(\eta, t | \eta', 0) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{D_y t}{h^2} (n\pi)^2\right) \cos(n\pi\eta) \cos(n\pi\eta') \quad (\text{A.10})$$

を用い、 $U(\eta)$ を水深平均流速 \overline{U} とそれからの偏差 $U'(\eta)$ で

$$U(\eta) = \overline{U} + U'(\eta)$$

と表せば、(A.8) は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\overline{X^2(t)} - \overline{U^2} t^2) &= \int_0^1 \int_0^1 U'(\eta) U'(\eta') \cdot \\ &\cdot \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^2}{D_y} \frac{1}{(n\pi)^2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{D_y t}{h^2} (n\pi)^2\right) \right\} \cos(n\pi\eta) \cos(n\pi\eta') \right] d\eta d\eta' \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

上式左辺は移流分散係数 D_L の定義に他ならず、(A.11) 式は $t \rightarrow \infty$ のとき、 D_L が

$$D_L \rightarrow \frac{2h^2}{D_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \left[\int_0^1 U'(\eta) \cos(n\pi\eta) d\eta \right]^2 \quad (\text{A.12})$$

となることを示している。

今、 $U'(\eta)$ としてべき乗則

$$U'(\eta) = \overline{U} [(m+1)\eta^m - 1] \quad (m \leq 1) \quad (\text{A.13})$$

を仮定しよう。そのとき、乱流拡散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U(y) \frac{\partial C}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (\text{A.14})$$

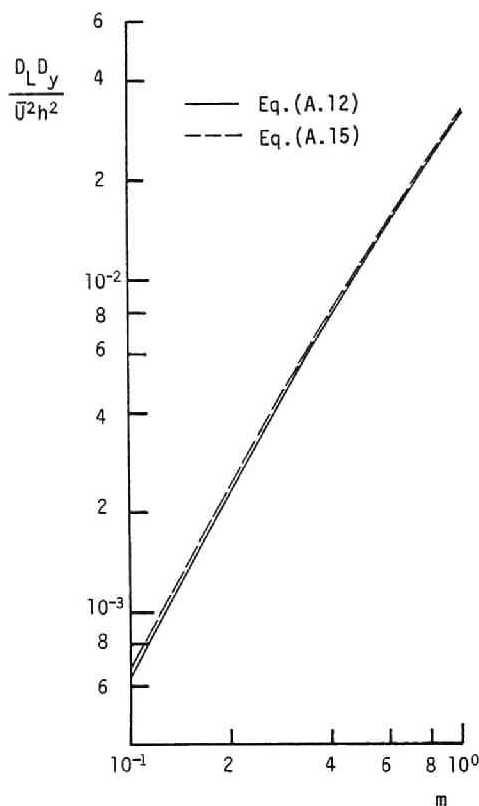
により C が規定されるならば、移流分散係数に関する Taylor の理論^{5,6)}、あるいは Chatwin の漸近解⁷⁾ より D_L は次のように表せる。

$$D_L = \frac{2m^2}{3(m+3)(2m+3)} \frac{\overline{U^2} h^2}{D_y} \quad (\text{A.15})$$

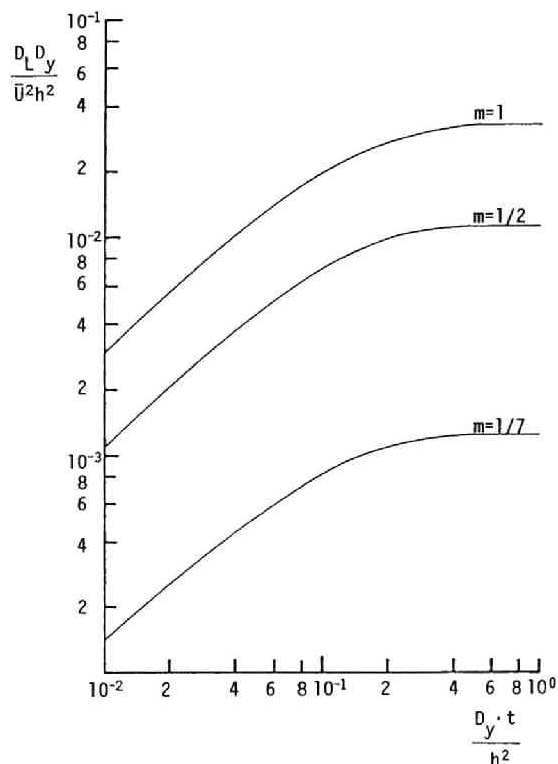
(A.12) 式と (A.15) 式の数式上の一致は示せなかったが、両者を m の関数として図示した図 A.2 よりほとんど一致しているのがわかる。

図 A.3 には m をパラメータとして D_L と t の関係を示した。どの場合も、無次元化時間 tD_y/h^2 が

0.4より大きいとき一定値に漸近していることがわかる。



図A.2 D_L と m の関係



図A.3 D_L と時間の関係

参考文献

- 1) Hosoda, T. and Yokosi, S. : Stochastic considerations on longitudinal dispersion, Mem. Fac. Eng., Hiroshima Univ., Vol. 9, No. 1, pp. 73-77, 1985.
- 2) Chatwin, P. C. : The initial development of longitudinal dispersion in straight tubes, J. Fluid Mech., Vol. 80, part 1, pp. 33-48, 1977.
- 3) Dewey, R. J. and Sullivan, P. J. : Longitudinal dispersion calculation in laminar flows by statistical analysis of molecular motions, J. Fluid Mech., Vol. 125, pp. 203-217, 1982.
- 4) Aris, R. : On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube, Proc. Roy. Soc. London, Vol. 235, Ser. A, pp. 67-77, 1956.

- 5) Taylor, G.I. : Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube, Proc. Royal Soc. London, Vol. 219, Ser. A, pp. 186-203, 1953.
- 6) Taylor, G. I. : Condition under which dispersion of a solute in a stream of solvent can be used to measure molecular diffusion, Proc. Royal Soc. London, Vol. 225, Ser. A, pp. 446-468, 1954.
- 7) Chatwin, P. C. : The approach to normality of the concentration distribution of a solute in a solvent flowing along a straight pipe, J. Fluid Mech., Vol. 43, part 2, pp. 321-352, 1970.

